LES PRIMITIVES

Primitives d'une fonction du type $u' u^n$

Si vous reconnaissez une forme du style $u'\,u^n$, alors une primitive sera $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$.

Soit par exemple $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2} = 3(x-1)^{-2}$. Si nous posons $u(x) = x-1$, alors $u'(x) = 1$, donc

$$f(x) = 3u'(x)\big(u(x)\big)^{-2} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x) = 3\frac{\big(u(x)\big)^{-2+1}}{-2+1} = 3\frac{\big(u(x)\big)^{-1}}{-1} = -\frac{3}{x-1}$$

Exercice 1

f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [-1,8]$ par

$$f(x) = \frac{2x^3+8x^2+8x-3}{x^2+4x+4}$$

1. Prouvez que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = 2x - \dfrac{3}{(x+2)^2}$

2. a) Déduisez-en *une* primitive G de f sur I.

b) Calculez *la* primitive F de f telle que $\mathrm{F}(0) = 2$.

Exercice 2

Étudiez si F est une primitive de f sur I

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+8x-5}{(x^2+x+3)^2}$ et $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2+x+3}$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x\sqrt{x}}$ et $\mathrm{F}(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}$ avec $\mathrm{I} =]0,+\infty[$

3. $f(q) = \dfrac{3q-4}{\sqrt{2q-4}}$ et $\mathrm{F}(q) = q\sqrt{2q-4}$ avec $\mathrm{I} =]2,+\infty[$

Exercice 3

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = 7\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \qquad g(t) = \mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$$

Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0 et une primitive de g.

Exercice 4

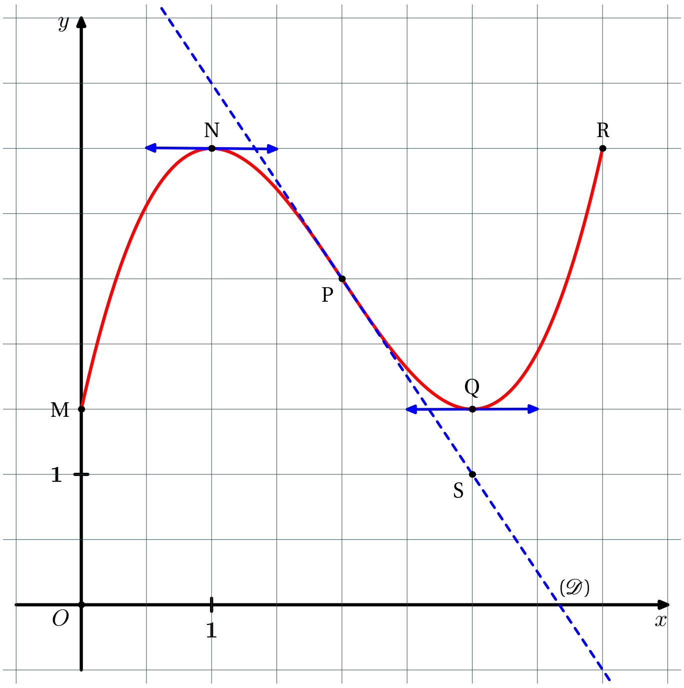
1. f est la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}$
Calculez une primitive F de f sur $]2,+\infty[$

2. G est la fonction définie sur $]2,+_{i}nfty[$ par $\mathrm{G}(x) = \dfrac{3x-4}{x-2}$
Calculez la fonction dérivée de G.

3. Que pouvez-vous en déduire pour les fonctions F et G ?
Vérifiez ce résultat en calculant $\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0,4]$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous



Les points M, N, P, Q et R appartiennent à $\mathscr{C}$. Les coordonnées de M sont $(0,3/2)$, celles de N $(1,7/2)$, celles de P $(2,2/5)$ celles de Q $(3,3/2)$ et celles de R $(4,7/2)$.
La courbe $\mathscr{C}$ admet en chacun des points N et Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La droite $(\mathscr{D})$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P ; elle passe par le point S de coordonnées $(3,1)$.

1. a) Donnez par lecture graphique $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

b) Déterminez une équation de la droite $(\mathscr{D})$.

2. Déterminez à l'aide du graphique le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur l'intervalle $[0,4]$.

3. a) Pour tout $x \in [0,4]$, on admet que $f'(x) = a(x-1)(x-3)$, a étant une constante réelle.
Déterminer a à l'aide des résultats de la question 1) a).

b) Vérifiez que pour tout $x \in [0,4]$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + \dfrac{9}{2}$.
Déterminez l'expression de $f(x)$ pour $x \in [0,4]$.