Chapitre 4

PROBABILITÉS

I - Une approche « philosophique »...

a. Un problème historique

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent *axiomatique*) en a été proposée trois siécles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI$^{\text{ème}}$ siécles pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.
Ainsi, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix (jeu consistant à jeter 3 dés), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir.
La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier », il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir. Y aurait-il plusieurs réalités ?

b. Qu'est-ce que le hasard ?

Parmi toutes les définitions possibles, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

FIG. 1 – Laplace

- pour certains, tout a une cause, et le hasard n'est que le reflet de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII$^{\text{ème}}$ siécle au moment où Laplace posa les bases d'une première théorisation des probabilités. C'est dans cet esprit que vous avez étudié les probabilités en classe de Première. Les probabilités sont alors déterminées *a priori*, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de $1/6$. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de Pascal, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourrir à l'expérience. Elle implique la notion centrale en Première d'**équiprobabilité** : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ? Nous en reparlerons un peu plus loin.
- pour d'autres, le hasard constitue notre univers. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent que d'obtenir une estimation des états possibles futurs. Les probabilités ne peuvent alors être calculées a priori.

Cet antagonisme peut se résumer en considérant l'expérience très simple suivante : on jette une punaise en l'air ; va-t-elle retomber sur la pointe ou sur la tête ?
Pour les « Laplaciens », il existe un nombre parfaitement déterminé, mais pas encore calculable *a priori*. On peut néanmoins l'approcher par une série de mesures expérimentales.
Pour d'autres, c'est prêter à la Nature des intentions mathématiques, alors que cette interprétation chiffrée n'est qu'œuvre humaine.

Qui a raison, qui a tort, le débat est encore ouvert. Nous pouvons néanmoins réunir deux grands groupes. Ceux qui prônent une étude expérimentale des probabilités ne sont en fait pas très éloignés des « Laplaciens », car l'idée centrale contenue dans

la Loi des grands nombres (en gros, la limite[a] des fréquences observées est égale à la probabilité : plus on fait de mesures, plus la fréquence se rapproche de la probabilité) est basée sur la définition Laplaciennne de la probabilité : cas favorables sur cas possibles.
Inversement, la géométrie du hasard des Laplaciens (1 chance sur 6 d'obtenir chacune des faces d'un dé) repose sur la parfaite symétrie du dé. Mais un dé peut-il être parfaitement symétrique ? Pour le vérifier, il faudrait faire un grand nombre d'expériences...

Bref, au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent. Mais il faut les avoir en tête : tout n'est pas équiprobable (voir le jeu du passe-dix) et la probabilité ne peut se réduire à la limite des fréquences, ne serait-ce que dans le cas d'une expérience qui ne peut se répéter : quelle est la probabilité de survivre à une guerre nucléaire ? Il semble difficille d'imaginer une série d'expériences pour s'approcher de cette probabilité...

Mêmes si elles peuvent apparaître antagonistes, ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience (le jeter d'un dé) est indépendant de l'observateur. Ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie. Comme le disait John Stuart Mill : *we must remember that the probability of an event is not a quality itself, but a mere name for the degree of ground which we, or someone else, have for expecting it.* Faute de données sures, en économie on estime a priori les probabilités de certains événements élémentaires, puis on utilise ensuite des théorèmes abstraits issus des mathématiques.

Oublions tout ce que nous venons de dire !

A-t-on besoin de savoir tout ça pour réussir au Bac ? Par exemple, depuis votre tendre enfance, vous calculez avec les nombres entiers sans connaître les axiomes de Peano, vous travailler en géométrie euclidienne même si elle ne correspond pas à la réalité : avez-vous déjà rencontré un véritable triangle rectrangle ? Et pourtant vous arrivez quand même à démontrer le théorème de Pythagore.
Mais le débat est plus passionné au sujet des probabilités car il a fallu attendre 1933 et le Russe Kolmogorov pour enfin les axiomatiser, alors que Euclide avait fait cela pour la géométrie 2300 ans plus tôt...
C'est ce sujet encore brûlant que nous allons explorer cette année et qui saura, je n'en doute pas, vous passionner !

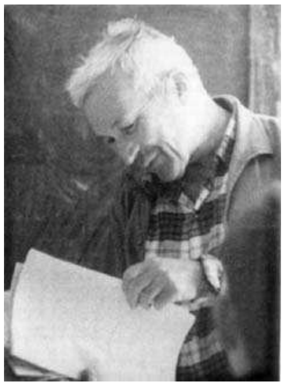


FIG. 2 – Kolmogorov

II - Quelques exemples pour explorer

a. Une activité de CE1

Pour la fête de l'école, les élèves de CE_2 ont préparé une danse qui s'exécute par couples : un garçon, une fille. La maîtresse doit faire des essais pour trouver les couples qui s'accordent le mieux, en appelant d'abord le garçon puis la fille.
Voici l'ensemble des garçons G = {Alain ; Bernard ; Pierre }
Voici l'ensemble des filles F = { Lise ; Renée ; Catherine ; Denise }
En mathématiques, nous aurons souvent à écrire des couples, appelés aussi 2-listes. Pour cela, nous utiliserons toujours la même écriture ; par exemple, le couple formé du garçon « Alain » et de la fille « Renée » sera écrit : **(Alain , Renée)**. Dans ce couple, « Alain » est le premier terme et « Renée » le deuxième terme. L'ordre des termes est important.
Citons le plus possible de couples. Nous en avons trouvé beaucoup ; le travail devient difficile : il faut vérifier pour chaque couple nouveau qu'il n'a pas été cité ; sommes-nous sûr(e)s de ne pas en avoir oublié ?
Il existe un moyen très facile qui nous permettra d'écrire tous les couples : un **arbre**. Les trois premières branches représentent chacune un garçon. De l'extrémité de chacune de ces branches partent quatre branches représentant chacune une fille. À chaque extrémité de ces dernières branches nous pouvons écrire un couple.

[a] il s'agit de la limite stochastique qui n'a rien à voir avec les limites étudiées au lycée...

Il y a donc 3 × 4 couples distincts : 3 possibilités pour le garçon × 4 possibilités pour la fille.

b. Description statistique

Une enquête est effectuée auprès des 100 élèves d'un lycée syldave concernant le temps de travail hebdomadaire et le sexe des élèves.
On a obtenu le tableau suivant

travail / sexe	< 5 minutes	$\geqslant$ 5 minutes
filles	20	15
garçons	60	5

Soit T l'ensemble de ceux qui travaillent plus de 5 minutes par semaine et G l'ensemble des garçons. Alors on notera $\overline{T}$ le complémentaire de T dans la population totale du lycée, et $\overline{G}$ celui de G, c'est à dire l'ensemble des filles.
Alors on peut construire le tableau des fréquences correspondant

travail / sexe	$\overline{T}$	T	fréquence par sexe
$\overline{G}$	20%	15%	35%
G	60%	5%	65%
fréquence par temps de travail	80%	20%	100%

c. Découvrons sur un exemple le vocabulaire des probabilités

Une situation probabiliste n'existe que s'il y a une expérience (à issue) aléatoire. Il faut pour cela introduire par exemple l'expérience habituelle « on prélève au hasard un élève du lycée syldave ». L'ensemble des issues de cette expérience est appelé mathématiquement l'**univers**, souvent noté Ω : c'est ici l'ensemble des 100 élèves du lycée.
Les parties T et G de Ω sont des **événements** qui seront décrits à l'aide de phrase entre guillemets. Par exemple, G est l'événement « l'élève syldave prélevé est un garçon ».
On suppose les élèves syldaves indiscernables à la vue, l'ouïe, le goût, le toucher et l'odorat : cette condition assure l'**équiprobabilité** vue en Première.
Ainsi, la probabilité que l'élève prélevé travaille plus de 5 minutes vaut $\mathbb{P}(T) = \frac{20}{100}$, la probabilité pour que ce soit un garçon vaut $\mathbb{P}(G) = \frac{65}{100}$ et la probabilité pour que l'élève prélevé soit un garçon qui travaille plus de 5 minutes vaut $\mathbb{P}(G \cap T) = \frac{5}{100}$
Maintenant, **parmi les garçons**, on en choisit un au hasard. L'univers a donc changé, mais pas les propriétés du tirage, ce qui assure encore l'équiprobabilité.
La probabilité pour que ce garçon travaille plus de 5 minutes vaut $\frac{5}{65} = \frac{1}{13}$.

III - Des définitions et des théorèmes

Nous ne préciserons pas plus, à notre niveau, les notions d'expérience et d'issue introduites dans l'exemple précédent.

a. Notion d'événement

On considère une épreuve aléatoire. Un événement est en quelque sorte une condition dont on peut dire après l'expérience, si elle est réalisée ou non. Par exemple, précédemment, on a considéré l'événement « l'élève syldave prélevé est un garçon ».
En fait

Définition 4.1
Un événement est un sous-ensemble de l'univers Ω

Il existe des événements un peu particuliers.

Événement contraire

L'événement contraire d'un événement A est l'ensemble des issues qui ne sont pas dans A. On le note souvent $\overline{A}$.
Ainsi, si l'on reprend l'événement G « l'élève syldave prélevé est un garçon », alors $\overline{G}$ sera « l'élève prélevé n'est pas un garçon[b] »

Événement impossible

Cet événement n'est réalisé par aucune issue lors de l'expérience considérée.
Par exemple, l'événement « l'élève prélevé suit avec passion les cours de mathématiques » ne contiendra aucune issue, à moins d'effectuer l'expérience sur une autre galaxie ce qui n'est pas le cas.
Comme cet événement ne contient aucune issue, il est *vide* : on le note donc $\emptyset$.

Événement certain

C'est un événement réalisé par toutes les issues. Par exemple :« l'élève prélevé(e) est un(e) élève »
Comme cet événement contient toutes les issues, c'est en fait l'univers tout entier.

b. Réunion et intersection

Définition 4.2
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω.
– L'événement constitué des éventualités appartenant à A *et* à B est noté $A \cap B$. (on lit « A inter B » ou « A et B »).
– L'événement constitué des éventualités appartenant à A *ou* à B ou aux deux est noté $A \cup B$. (on lit « A union B » ou « A ou B »).

Toujours en reprenant notre exemple initial
– $G \cap T$ est l'événement « l'élève prélevé est un garçon travaillant moins de 5 minutes »
– $G \cup T$ est l'événement « l'élève prélevé est un garçon ou un(e) élève travaillant moins de 5 minutes »

c. Qu'est-ce qu'une probabilité ?

Nous pouvons, même à notre niveau, donner une définition d'une probabilité :

Définition 4.3
Notons Ω l'ensemble des issues possibles d'une expérience (l'univers).
On appelle probabilité sur Ω toute « transformation » $\mathbb{P}$ allant de l'ensemble des « parties » de Ω dans $[0,1]$ et vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pour toutes « parties » A et B de Ω *disjointes* (C'est à dire dont l'intersection est vide).

C'est un peu abstrait. Mais il faut retenir qu'une probabilité est une sorte de fonction qui à un événement[c] associe un nombre compris entre 0 et 1.
En particulier

Propriété 4.1

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

On n'a pas trop de scrupules à se persuader que la probabilité de l'événement impossible est nulle. Par exemple, si vous lancez un dé cubique dont les six faces sont numérotées de 1 à 6, alors on écrira que la probabilité de l'événement « le résultat lu sur le dé est 42 » est nulle.

Ça se comprend...Mais ça peut même se prouver !
Allez...pour le plaisir intellectuel...même si ça ne tombera pas dans le contrôle...
Considérons Ω et $\emptyset$: leur intersection est bien sûr vide. Ce sont donc des événements disjoints.

[b] C'est donc en général une fille.
[c] Donc un ensemble

D'après notre définition, on peut donc écrire que

$$\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset)$$

Mais si vous collez du vide à un ensemble, celui-ci ne change pas, i.e. $\Omega \cup \emptyset = \Omega$.
Or, d'après notre définition, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, donc

$$1 = 1 + \mathbb{P}(\emptyset)$$

Et nous en déduisons que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$[d]

Une autre propriété importante est

Propriété 4.2

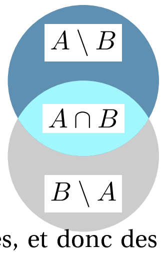
$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{A})$$

Allez, essayez de le prouver : ça se fait comme pour la propriété précédente...

Ensuite, vous retiendrez

Propriété 4.3

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$



Pour cette dernière propriété, je vous donne un petit coup de pouce : il faut découper notre réunion en ensembles disjoints en écrivant par exemple que

- ▹ $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
- ▹ $\mathrm{B} = (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
- ▹ $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A})$

Retenez donc que les probabilités, ce n'est pas du « bidouillage », qu'on utilise des définitions, des théorèmes, et donc des démonstrations comme par exemple vous le faites depuis longtemps en géométrie.

Faîtes bien attention maintenant à ne pas confondre univers fini et équiprobabilité. Considérez par exemple la situation suivante : on sonne à votre porte. Quelle est la probabilité pour que ce soit Monica Bellucci (ou Quasimodo) qui vienne vous demander en mariage ? L'univers ne contient que deux événements élémentaires : ou bien c'est Monica ou bien ce n'est pas Monica. Le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles est donc de 1/2, pourtant...

d. Un autre exemple pour mettre en pratique

Considérons l'expérience simplissime consistant à lancer deux fois un dé à six faces. L'univers Ω est donc constitué de l'ensemble des couples (i, j), avec i et j appartenant à l'ensemble $[\![1,6]\!]$: il y a donc 36 éléments dans Ω. Intéressons nous à la somme des deux chiffres et soit A l'événement « le total fait neuf ».

$$\mathrm{A} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer », alors

$$\mathrm{B} = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

[d]Shakespeare aurait dit « *much ado for nothing...* »

IV - Quelques exercices

Exercice 1

Un jeu syldave consiste à lancer simultanément un dé cubique parfaitement équilibré et son voisin, lui aussi parfaitement équilibré, du 1$^{\text{er}}$ étage.
Si le voisin tombe sur le dos, on lui associe le nombre 1. S'il tombe sur le ventre, on lui associe le nombre 2.
Un résultat est la somme du numéro obtenu sur le dé et du nombre obtenu par le voisin.

1. Dresser un arbre de toutes les possibilités.

2. Déterminez les probabilités de chaque événement élémentaire.

3. Déterminer les probabilités suivantes :

   a) la somme est impaire ;

   b) la somme est multiple de 3 ;

   c) la somme n'est ni 6, ni 5 ;

   d) la somme est au moins 4 ;

   e) la somme est au plus 3.

Exercice 2

Dans la capitale syldave qui compte 300 habitants, 70 % sont des fiéfés menteurs.
40 % des habitants organisent des orgies de chamallow tous les jeudis soirs.
30 % des habitants sont des fiéfés menteurs qui organisent des orgies de chamallow tous les jeudis soirs.
La police secrète syldave torture au hasard un habitant de la ville. On note F l'événement « l'habitant torturé est un fiéfé menteur », O l'événement « l'habitant torturé organise des orgies de chamallow tous les jeudis soirs ».

1. Résumez la situation dans un tableau à double entrée.

2. Déterminez $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{O})$.

3. Déterminer $p(\overline{\mathrm{F}} \cup \mathrm{O})$.

4. Calculez la probabilité que vous alliez passer vos vacances en Syldavie.

Exercice 3

Plusieurs amis syldaves veulent choisir une activité pour la soirée.
73 % d'entre eux veulent se baigner nus dans la fontaine gelée de la Place du Génie des Carpathes, 30 % veulent aller chasser le ver de terre sauvage à poil ras, 3 % n'aiment aucune de ces deux activités.
Appelons V l'évènement « la personne veut aller chasser le ver de terre sauvage à poil ras » et B l'évènement « la personne veut se baigner nue dans la fontaine gelée de la Place du Génie des Carpathes ».

1. Illustrer la situation à l'aide d'un tableau de probabilités.

2. Dessiner le diagramme de Venn correspondant.

3. Quelle est la part des amis qui veulent aller chasser le ver de terre sauvage à poil ras et se baigner nus dans la fontaine gelée de la Place du Génie des Carpathes ?

4. Quelle est la part des amis qui veulent aller chasser le ver de terre sauvage à poil ras ou se baigner nus dans la fontaine gelée de la Place du Génie des Carpathes ?

5. Quelle est la part de gâteau qui contient la fève ?

Exercice 4

On a trois cartons : on écrit sur le premier « $\mathfrak{K}$ », sur le second « $\mathfrak{X}$ » et sur le troisième « $\mathfrak{S}$ ». On retourne les cartons sur une table.

1. On choisit un carton, on note la lettre, on remet le carton sur la table, et on choisit de nouveau au hasard un deuxième carton, on note la lettre.
   a) Construire un arbre de choix pour déterminer tous les tirages possibles.
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ » (« $\mathfrak{X}$ » puis « $\mathfrak{S}$ ») ?

2. On choisit un carton sans le remettre, on note la lettre, et on choisit de nouveau au hasard un deuxième carton, on note la lettre.
   a) Construire un arbre de choix pour déterminer tous les tirages possibles.
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ » (« $\mathfrak{X}$ »puis « $\mathfrak{S}$ ») ?

Exercice 5

Quatre personnes déposent leurs Kalashnikov au vestiaire d'un restaurant syldave. La dame du vestiaire, un tantinet espiègle, décide de rendre les Kalashnikov au hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins un client retrouve sa Kalashnikov ?

Indication : Il est plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire.

Exercice 6

Marko Ĉzzẓtztshhhŷt veut se débarrasser de son beau-frère pour devenir Grand Conducteur de La Syldavie à sa place. Il lui confectionne donc un gâteau au chocolat avec 15 gousses d'ail[e] empoisonnées à l'intérieur.
Malheureusement, son beau-frère l'invite à partager le gâteau avec ses 6 gardes du corps qui font office de ministres.
Le gâteau est donc partagé en 8 parts de même taille.
Quelle est la probabilité que la part de Marko contienne au moins une part empoisonnée ?

FIG. 3 – Ministre syldave de l'Économie

[e] Une vieille recette syldave