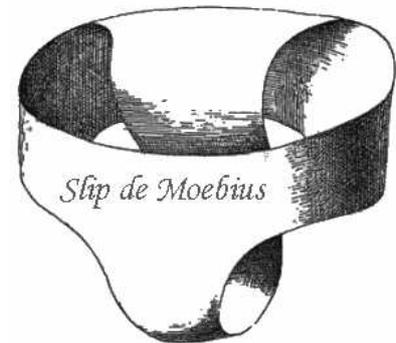


VINGT-TROISIÈME AVENTURE

SECTIONS PLANES DE SURFACE



Résumé

Pour la dernière, nous allons découvrir les fonctions de deux variables réelles. En gagnant une variable, la représentation graphique gagne aussi une dimension pour devenir une surface. Mais n'ayez pas peur! Le contenu reste modeste: nous ne ferons qu'effleurer les problèmes...enfin presque, vous commencez à être habitué(e)s.

A - FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

A - 1 : *Déjà vu...*

Mathémator : Avant de nous quitter, découvrons ensemble une dernière notion mathématique: il sera ensuite temps pour vous de voler de vos propres ailes.

Téhessin : Quel déchirement œdipien!

Mathémator : J'en pleure d'avance...Bon, souvenez-vous, vous étiez à l'école primaire et vous découvriez l'aire d'un rectangle.

Téhessin : Longueur fois largeur!

Mathémator : Impressionnant! D'autant plus que vous travailliez déjà à cette heureuse époque avec une fonction de deux variables réelles que votre instituteur(trice) vous a peut-être introduit de la sorte:

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\ell, L) \mapsto \mathcal{A}(\ell, L) = \ell \times L$$

Téhessin : Je ne me rappelle pas avoir rencontré cette notation en CE2, mais je crois comprendre que nous parlons en fait de fonctions qui dépendent de deux variables et qui renvoient un nombre réel.

Mathémator : Il ne faut pas être si restrictif. Il peut exister des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^{32} , d'ailleurs de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 aussi, et plus généralement de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , avec n et p des entiers naturels. Malgré tout, nous n'aborderons cette année que les fonctions de deux variables réelles à valeurs dans \mathbb{R} .

Allez, trois autres petits exemples. Considérez deux résistances montées en parallèle: quelle est la résistance équivalente?

Téhessin : Je sais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Mathémator : On obtient donc facilement une fonction r dépendant des deux variables R_1 et R_2

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ r : (R_1, R_2) \mapsto r(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Enfin, un dernier exemple physique : deux objets de masses respectives m_1 et m_2 distants de d exercent une force gravitationnelle d'intensité $G \frac{m_1 m_2}{d^2}$.

Téhessin : Il y a plus de deux variables : m_1 , m_2 et d , car je sais que G est une constante.

Mathémator : Pas de précipitation Téhessin ! Je ne vous ai pas précisé quelle fonction nous allons étudier. Nous allons considérer ici que la distance est constante et que nous allons faire varier les masses. D'ailleurs, pour faciliter notre tâche, nous allons noter les *variables* de manière conventionnelle par x et y pour mieux les distinguer des *paramètres* :

$$\mathcal{F} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \mathcal{F}(x,y) = G \frac{xy}{d^2} \end{array}$$

Mais trêve de physique : retournons en maternelle

$$\mathcal{S} : \begin{array}{l} \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) \mapsto \mathcal{S}(x,y) = x + y \end{array}$$

Téhessin : La formulation est un peu déroutante, mais je crois comprendre que cette fonction n'est autre que la somme de deux entiers.

Mathémator : Je vous laisse le soin de calculer quelques images : $\mathcal{S}(3,2)$, $\mathcal{S}(28,4)$, etc. et d'imaginer d'autres fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} que vous avez rencontré au cours de votre brillante carrière.

Téhessin : Et j'imagine que nous allons calculer dérivées et limites pour finir par tracer les représentations graphiques de ces fonctions.

Mathémator : Pas si vite ! Les problèmes de dérivation et de limites deviennent très vite compliqués pour les fonctions de deux variables, c'est pourquoi nous ne les étudierons pas cette année. Sachez au moins que, par exemple, une fonction peut être « dérivable » selon x et selon y sur un « intervalle » et pourtant ne pas être continue en certains points. Cela trouble beaucoup d'étudiants car ils abordent l'étude des fonctions de deux variables sans intuition géométrique.

Nous allons pour notre part adopter une toute autre démarche : nous allons nous contenter d'étudier « géométriquement » ces fonctions en espérant que vous garderez ces images en tête l'année prochaine.



En attendant, voici un petit exercice pour vous montrer que vous savez de quoi nous allons parler..

A - 2 : Lignes de niveaux sur une carte

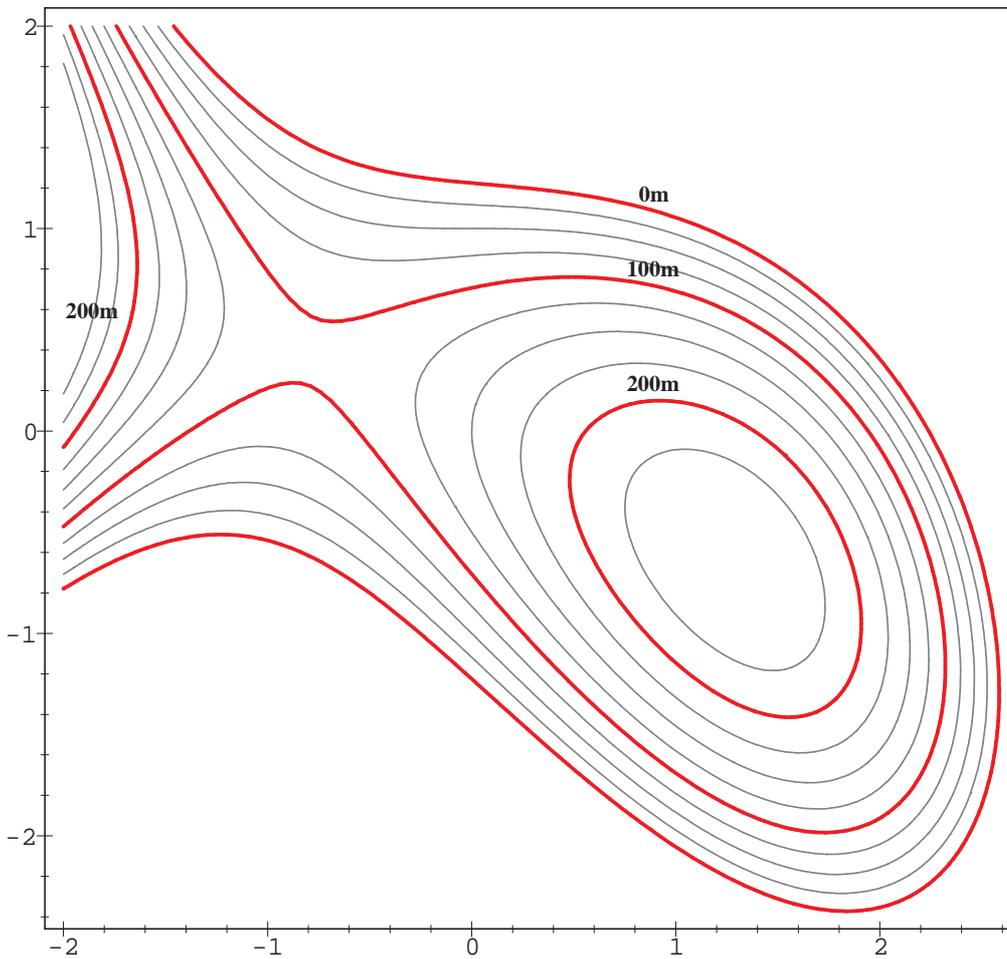
La figure ci-dessous est une carte du relief d'une presqu'île: le contour extérieur est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.

Partie expérimentale

- 1) Un skieur de fond perdu dans le brouillard s'arrête, les skis bien horizontaux pour ne pas glisser, et cherche à se repérer à l'aide de son altimètre et de sa boussole. Il voit qu'il se trouve à 100 mètres d'altitude, avec ses skis orientés droit vers l'est. La pente est descendante vers sa gauche. Quelles est sa position sur la carte?¹

1. Deux positions possibles

- 2) Le skieur décide de continuer son chemin à la boussole, droit vers l'est, jusqu'à atteindre la mer. Dessinez le profil du relief le long de l'itinéraire qui l'attend, en évaluant les dénivelés successifs.



- 3) Regardant mieux son altimètre avant de se mettre en route, le skieur s'aperçoit avec effroi que celui-ci est cassé, de sorte qu'il ne peut connaître son altitude et que ce qu'il avait déduit en (1) est erroné. Tracez sur la carte l'ensemble de ses positions possibles.

Un plaisancier mouillant dans la baie située au sud de la presqu'île voudrait franchir la presqu'île à skis pour rejoindre la côte nord, en se dirigeant toujours droit vers le nord.

- 4) Dessinez le profil du relief le long de divers itinéraires sud-nord, en évaluant pour chacun de ces itinéraires l'altitude du point culminant. En quel point de la baie le plaisancier doit-il aborder pour que son dénivelé soit le plus petit possible? Marquez sur la carte le point culminant de son itinéraire, et évaluez-en l'altitude.

Partie « calculs »

En fait la fonction de la figure a pour expression

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$$

(les valeurs des niveaux étant exprimées en centaines de mètres).

- 1) Discutez, en fonction du paramètre v , l'allure du graphe de la fonction $f|_{y=v}$ (restriction de f à la droite ouest-est de latitude v , c'est à dire la fonction d'UNE variable qui à x associe $f(x,v)$).
- 2) Précisez par le calcul votre résultat de la question .2.
- 3) Discutez, ne fonction du paramètre u , l'allure du graphe de la fonction $f|_{x=u}$ (restriction de f à la droite sud-nord de longitude u), et précisez par le calcul vos résultats de la question .4.

B - SURFACES D'ÉQUATION $z = f(x,y)$

B - 1 : Généralités

Mathémator : Rappelez-moi la définition de la représentation graphique d'une fonction f définie sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R} .

Téhessin : C'est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.

Mathémator : C'est un peu court jeune homme! On a du vous dire en seconde que si on munit l'espace d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la représentation graphique d'une fonction d'une variable f définie sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R} est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y = f(x)$ avec x un élément de \mathcal{D} . On dit que $y = f(x)$ est une équation de la courbe représentative de f .

Il suffit maintenant d'adapter un peu le vocabulaire: allez-y!

Téhessin : Je tente la définition sans filet

Définition XXIII-1

Si on munit l'espace d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la représentation graphique d'une fonction de deux variables f définie sur un domaine \mathcal{D} est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $z = f(x,y)$ avec (x,y) un élément de \mathcal{D} . On dit que $z = f(x,y)$ est une équation de la surface représentative de f .

Mathémator : Pas mal! Maintenant, continuons l'analogie: est-ce qu'une sphère peut-être la représentation graphique d'une fonction de deux variables?

Téhessin :!?.

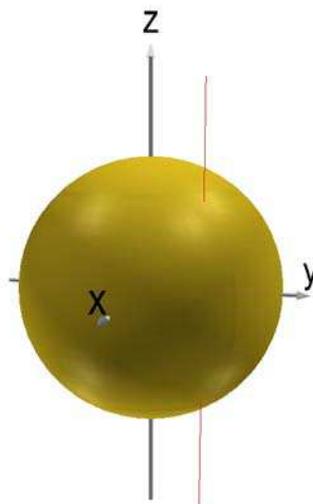
Mathémator : Je vois, il faut encore vous rafraîchir la mémoire. Est-ce que dans le plan, toute courbe est la représentation graphique d'une fonction (d'une seule variable)?

Téhessin : Je suppose que non...ah oui! Il ne faut pas que la courbe retourne en arrière.

Mathémator : Mouais, et plus rigoureusement?

Téhessin : Un réel ne doit pas avoir plus d'une image: toute droite parallèle à l'axe des ordonnées ne doit couper la courbe qu'en un point maximum.

Mathémator : Voilà! Par exemple un cercle n'est pas la représentation graphique d'une fonction d'une variable car des réels auraient dans ce cas deux images. Et bien c'est pareil pour une fonction de deux variables: à tout couple (x,y) de \mathcal{D} doit correspondre un unique réel z . Cela signifie que la droite perpendiculaire au plan (xOy) passant par le point $M(x,y,0)$ doit couper la surface en un seul point, ce qui n'est pas le cas pour une sphère.



B - 2 : Surfaces d'équation $z = ax + by + c$

Mathémator : À votre avis, quelle est la tête d'une telle surface ?

Téhessin : Elle a pour équation $z = ax + by + c$...hummm...c'est à dire $ax + by - z + c = 0$: c'est un plan !

Mathémator : Bien joué ! Il s'agit du plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par le point $M(0,0,c)$. Vous

remarquez que c est en quelque sorte la « cote à l'origine ».

Maintenant, est-ce que tout plan est la représentation graphique d'une fonction de deux variables ? La question n'est pas si bête car vous savez que dans le plan, les droites « verticales » d'équation $x = \text{constante}$ ne sont pas des courbes représentatives de fonctions d'une variable, car elles n'ont pas une équation du type $y = f(x)$.

Téhessin : Je suppose qu'il existe un problème similaire. En fait, c'est quand l'équation n'a pas de z , comme dans le plan quand il n'y avait pas de y .

Mathémator : Oui, mais pourquoi ?

Téhessin : S'il n'y a pas de z , on ne peut pas écrire $z = f(x,y)$.

Mathémator : S'il n'y a pas de z comme vous dites, c'est qu'on est face à un plan « vertical » ce qui pose problème pour l'unicité de l'image.

Autre petite question anodine qui reviendra plus tard : comment fabriqueriez-vous un plan ?

Téhessin : Un plan est impossible à fabriquer car il n'a pas d'épaisseur...

Mathémator : Oui, d'accord. Mais je pensais à une fabrication mathématique. Quels matériaux de base utiliseriez-vous ?

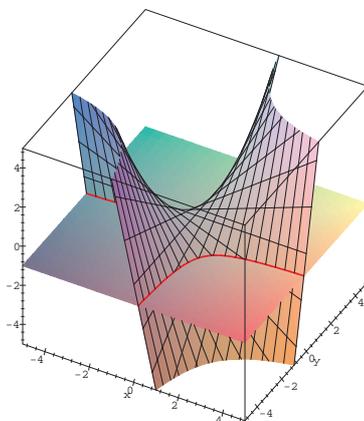
Téhessin : Je suppose que je collerais bout à bout des droites, comme pour un radeau : c'est ce que vous voulez me faire dire ?

Mathémator : Parfait ! Cette possibilité de fabriquer une surface à partir de droites va, vous allez le voir, être un critère déterminant pour étudier les surfaces et leurs sections planes.

Mais il est temps d'avancer : après l'addition, passons à la multiplication.

B - 3 : Surfaces d'équation du type $z = xy$

Mathémator : Voici vos tables de multiplication avec en plus la représentation d'un plan. Comment pouvez-vous interpréter ce graphique ?



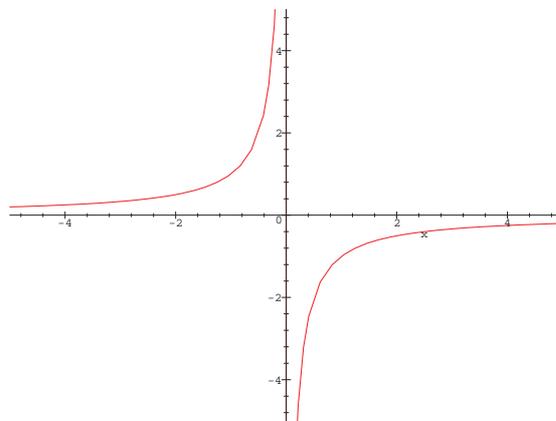
Téhessin : D'après ce que vous me dites, la surface « grillagée » semble être la représentation de la surface d'équation $z = xy$ et le plan semble être d'équation $z = -1$.

Mathémator : D'accord. Que représente la courbe rouge ?

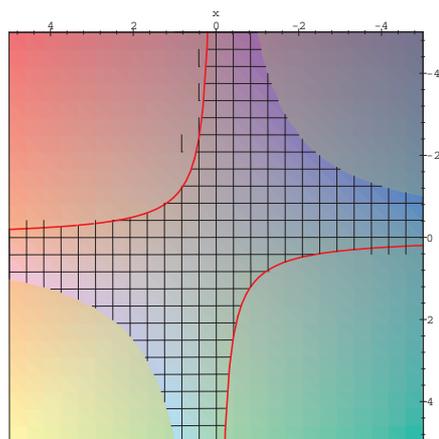
Téhessin : C'est l'intersection du plan et de la surface. C'est donc l'ensemble des points de coordonnées (x,y,z) tels que
$$\begin{cases} z = xy \\ z = -1 \end{cases}$$

Mathémator : C'est à dire l'ensemble des points du plan d'équation $z = -1$ tels que $xy = -1$, soit $y = -\frac{1}{x}$. Ça ne vous rappelle rien ?

Téhessin : Dans le plan, la courbe d'équation $y = -1/x$ est une hyperbole

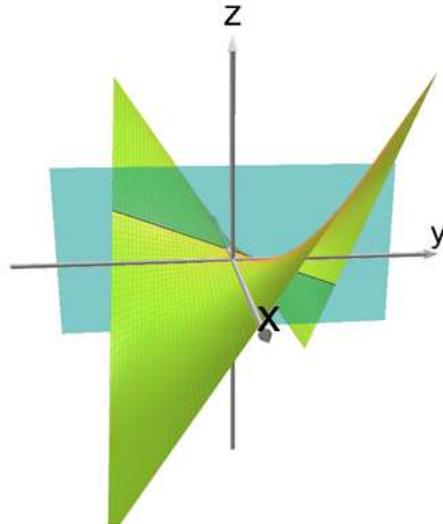


Mathémator : Et si l'on regarde la surface précédente vue d'avion...



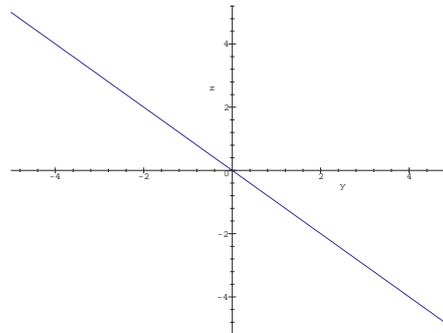
Incroyable, non ? Et pourtant c'est l'une des compétences qu'on vous demande d'acquérir cette année : à partir d'une surface d'équation $z = f(x,y)$, il s'agira d'étudier les sections par des plans parallèles aux axes de coordonnées.

Par exemple, pour la section par le plan d'équation $x = -1$ on observe

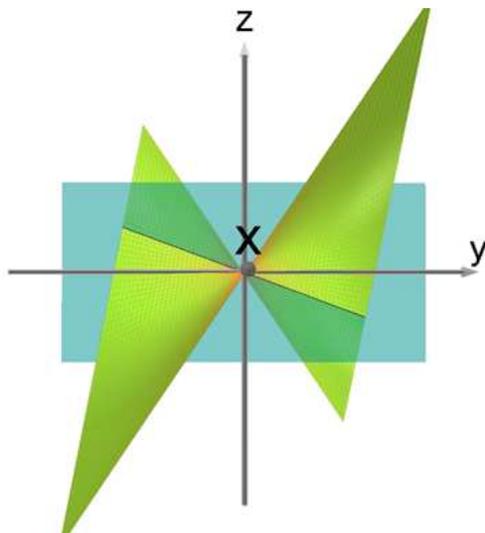


À vous d'interpréter.

Téhessin : Comme tout à l'heure, il s'agit de déterminer l'ensemble des points de coordonnées (x,y,z) tels que $\begin{cases} z = xy \\ x = -1 \end{cases}$, c'est à dire l'ensemble des points du plan d'équation $x = -1$ tels que $z = (-1) \times y = -y$...c'est une droite!



Mathémator : On peut le visualiser en se plaçant face au plan d'équation $x = -1$



Et on peut obtenir le même résultat pour une coupe parallèle au plan (xOz) . On obtient donc un résultat assez étonnant, à savoir qu'on peut construire cette surface en collant des petites baguettes : comme pour les plans, on dit que cette surface est *réglée* car elle est obtenue comme famille de droites.

Il vous reste à généraliser ces résultats en remplaçant -1 par un réel quelconque et de voir si certaines valeurs posent problème.

B - 4 : Paraboloïde hyperbolique

Téhessin : Vous voulez vraiment m'achever en employant des termes aussi dangereux pour ma santé mentale !

Mathémator : Rassurez-vous mon petit Téhessin, nous venons juste de les étudier au paragraphe précédent. L'adjectif *hyperbolique* se comprend puisque des coupes par des plans parallèles à (xOy) nous ont permis d'obtenir des hyperboles. Il reste à expliquer d'où vient le *paraboloïde*.

Pour cela, nous allons effectuer un changement de repère : en effet, le programme spécifie que nous ne pouvons effectuer que des coupes parallèles aux plans de coordonnées. Nous allons donc changer ces coordonnées pour changer nos plans de coupe.

Notons $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

Vérifiez que le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormé.

Téhessin : Ça, j'y arrive en calculant les normes et les produits scalaires deux à deux.

Mathémator : Soit M un point. On notera (x, y, z) ses coordonnées dans l'ancien repère et (X, Y, Z) celles dans le nouveau repère.

Par définition, on a

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3$$

Exprimez \overrightarrow{OM} en fonction de $X, Y, Z, \vec{i}, \vec{j}$ et \vec{k} .

Téhessin : C'est fait sur mon cahier de brouillon.

Mathémator : Vérifions...d'accord ! Maintenant, vous savez que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

donc, compte tenu de l'unicité du triplet de coordonnées dans un repère donné, exprimez x, y et z en fonction de X, Y et Z .

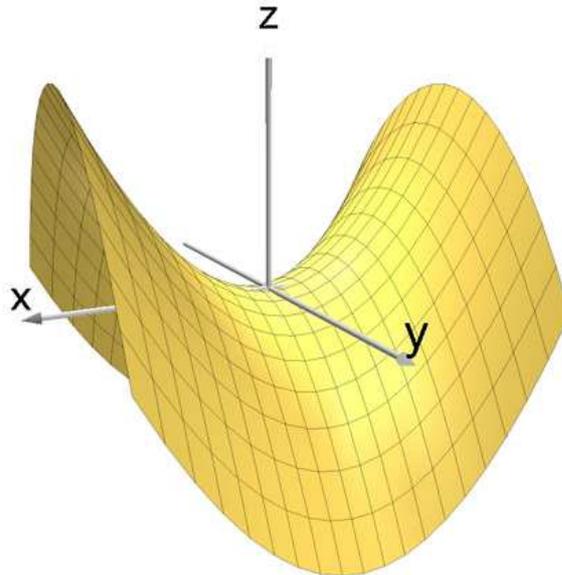
Téhessin : C'est fait !

Mathémator : Bon ! Il ne reste plus qu'à utiliser le fait que $z = xy$ pour en déduire une relation liant uniquement X , Y et Z .

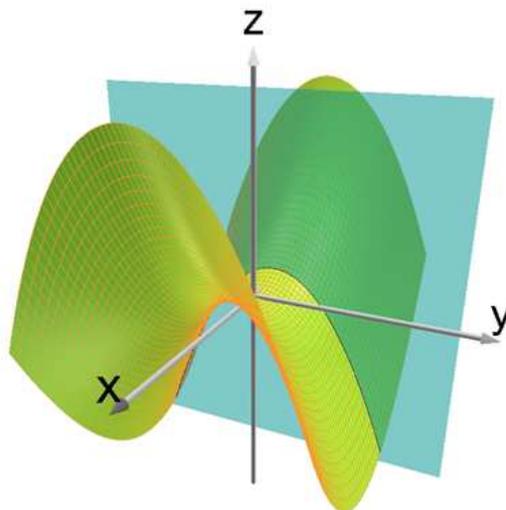
Téhessin : Bon...hop...je multiplie...je développe...je réduis...j'ordonne et j'obtiens

$$Z = \frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2}$$

Mathémator : Voici donc l'équation du parabolôïde hyperbolique dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et une représentation graphique qui doit vous rappeler quelque chose



Coupons maintenant par le plan d'équation $X = -1$



Téhessin : On devine une parabole, ce qui semble enfin justifier le *parabolôïde*. Si X vaut -1 , alors $Z = -\frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}$ ce qui ressemble bien à une parabole dans le plan $X = -1$.

Mathémator : Vous voyez bien que ce chapitre est facile ! Je vous laisse le soin d'étudier l'intersection avec un plan parallèle à (XOZ) . Sinon, pour le plaisir, je vous propose l'exercice suivant :

Exercice XXIII-1 Lieu géométrique

Étudiez l'intersection du parabolôide hyperbolique précédent avec le plan d'équation $X = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ et montrez qu'il s'agit d'une parabole dont vous donnerez les coordonnées du sommet S_a . Quel est le lieu géométrique de S_a lorsque a décrit \mathbb{R} ?

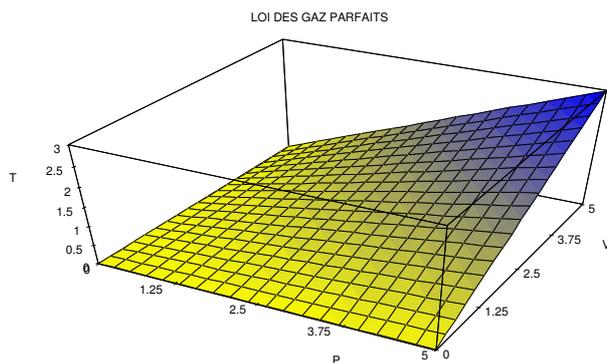
Mathémator : Pour votre culture générale, sachez que cette surface intervient dans l'étude de la loi des gaz parfaits ($pV = nRT$), dans l'étude des barycentres de quatre points de l'espace, dans la théorie des jeux, etc. Mis à part le cas des gaz parfaits que nous verrons en exercice, les calculs permettant de faire le lien avec le parabolôide hyperbolique sont un peu trop complexes. Nous simplifierons malgré tout quelque peu la situation pour faire le lien avec les barycentres.

Exercice XXIII-2 Loi des gaz parfaits

Des gaz ayant certaines propriétés que vous étudierez plus tard sont appelés *gaz parfaits*. Ces gaz obéissent à une loi assez remarquable

$$PV = nRT$$

où P , V et T représentent respectivement la pression, le volume et la température du gaz. Le nombre n représente la quantité de matière exprimée en moles et R est la constante des gaz parfaits et vaut $8,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$. Voici la représentation de cette équation pour une mole de gaz

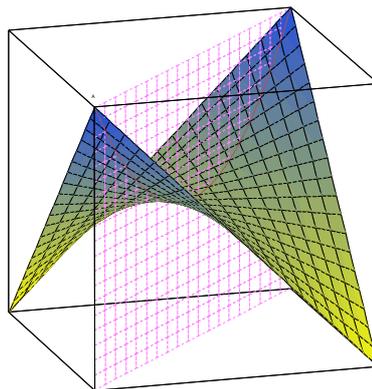


Étudiez les courbes isochores (à volume constant), isobares (à pression constante) et isothermes (à température constante)

Exercice XXIII-3 Parabolôide hyperboliques et barycentres

- 1) A, B, C et D sont quatre points distincts; λ et μ sont deux réels non nuls.
 M est le barycentre de (A, λ) et (B, $1 - \lambda$), N est le barycentre de (C, $1 - \lambda$) et (D, λ).
 P est le barycentre de (A, μ) et (D, $1 - \mu$), Q est le barycentre de (C, $1 - \mu$) et (B, μ), R est le barycentre de (M, μ) et (N, $1 - \mu$).
 - a) Prouvez que R est barycentre des points P et Q affectés de coefficients que vous préciserez.
 - b) Expliquez pourquoi, même si les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires, les droites (MN) et (PQ) sont sécantes.
- 2) Étant donné un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points A, B, C et D sont quatre sommets d'un cube de centre O tels que leurs coordonnées soient respectivement $(1,1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ et $(1,-1,-1)$. On note \mathcal{S} la surface d'équation $z = xy$.
 - a) Montrez que A, B, C, D, M, N, P et Q appartiennent à \mathcal{S} quels que soient λ et μ .

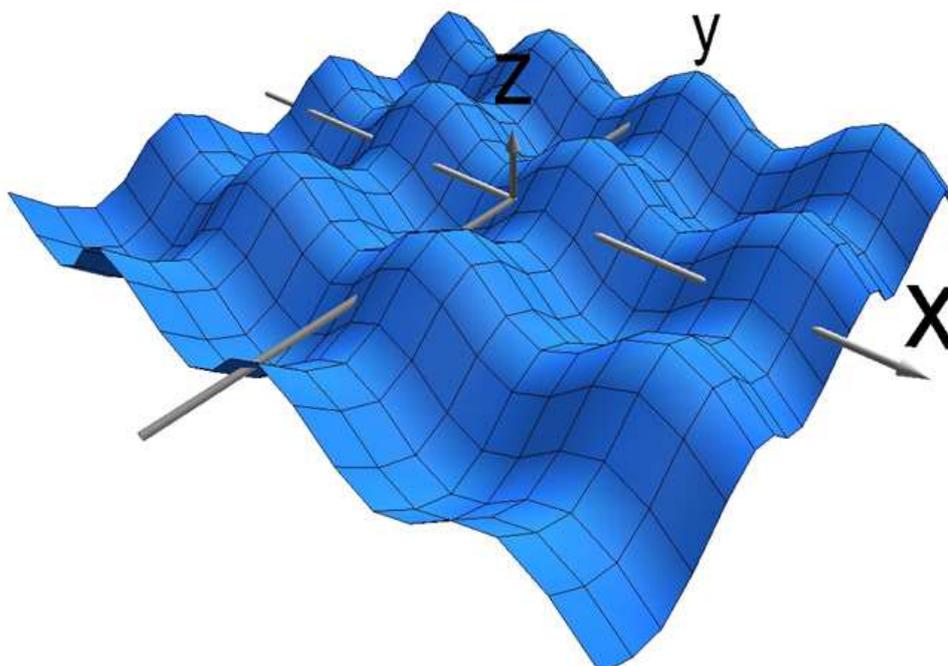
- b) Que peut-on dire des droites (AB) , (BC) , (CD) et (DA) par rapport à \mathcal{S} ?
- c) Et R ?
- d) Soit \mathcal{P}_1 le plan d'équation $y = 1$. Montrez que (AB) est incluse dans l'intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{S} .
- e) Inversement, considérons un point E appartenant à l'intersection de \mathcal{S} et \mathcal{P}_1 . Expliquez pourquoi E appartient au plan \mathcal{P}_2 d'équation $x = z$. Pourquoi ces deux plans sont-ils sécants? Pourquoi leur intersection est la droite (AB) ?
- f) Quelle est l'intersection de \mathcal{S} et \mathcal{P}_1 ? de \mathcal{S} et \mathcal{P}_3 d'équation $x = 1$?
- 3) La figure ci-dessous représente différents segments $[MN]$ et $[PQ]$ pour des valeurs de λ et μ comprises entre 0 et 1. D'après ce que nous venons de voir, tous les segments sont inclus dans \mathcal{S} ce qui confirme le résultat vu en cours.



- a) Quel semble être le chemin le plus court pour aller de A en C en restant sur \mathcal{S} ?
- b) On admet que ce chemin passe par les diagonales des mailles. Expliquez pourquoi les nœuds des mailles utilisés par ce chemin sont dans le plan d'équation $x = y$ en raisonnant sur λ et μ .
- c) Déduisez-en la nature de ce chemin.

Exercice XXIII-4 Boîte à œufs

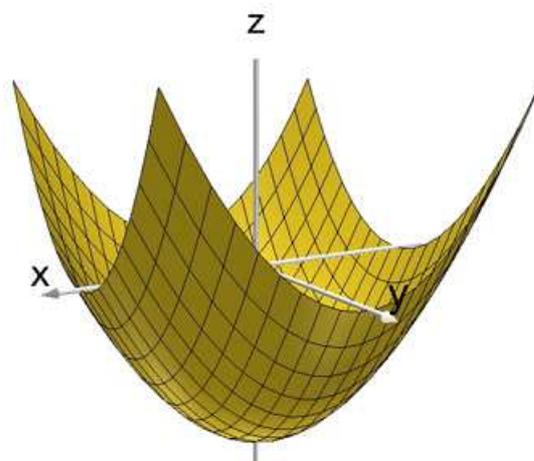
On considère la surface d'équation $z = \sin x - \sin y$



Quelles sont les cotes maximales et minimales? Étudiez l'intersection avec le plan d'équation $z = 0$. Pour devenir un champion en trigo, montrez que si l'on remplace dans l'équation le symbole $-$ par un \times , on obtient encore une boîte à œufs.

B - 5 : Un exemple de surface de révolution : le paraboloides de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$

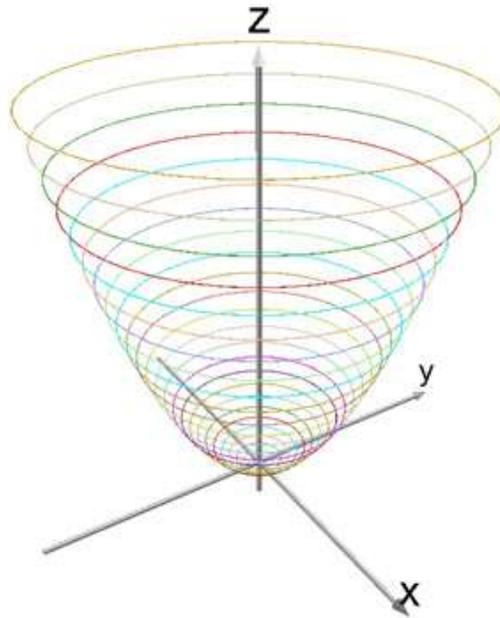
Mathémator : Voyez ce bel objet



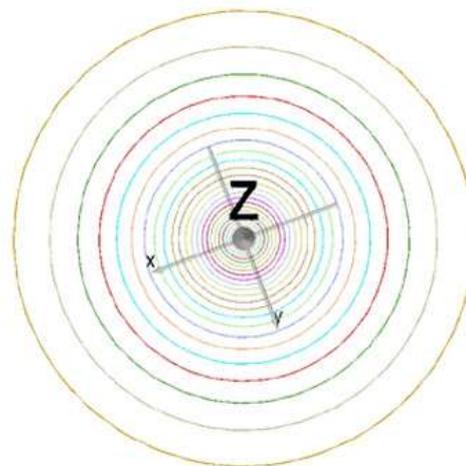
dont l'équation est $z = x^2 + y^2$. Pourriez-vous trouver une formulation, disons, plus géométrique de cette surface.

Téhessin : Et bien , $x^2 + y^2$, ça ressemble à une distance dans le plan...en fait, $x^2 + y^2 = k$, c'est l'équation d'un cercle dans le plan, mais je ne vois pas trop de cercle sur la figure...

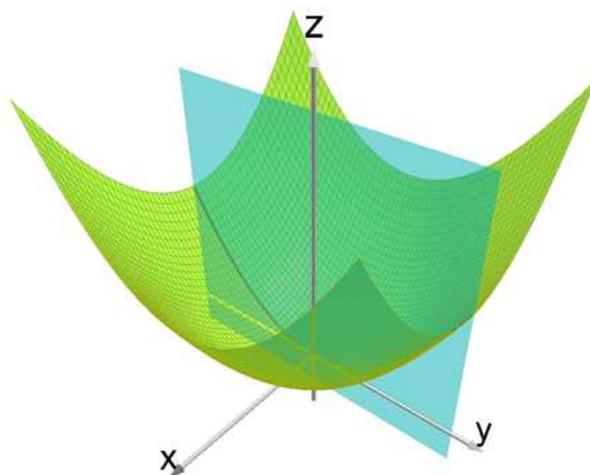
Mathémator : Faisons passer un scanner à notre surface, peut-être cela vous éclairera-t-il...



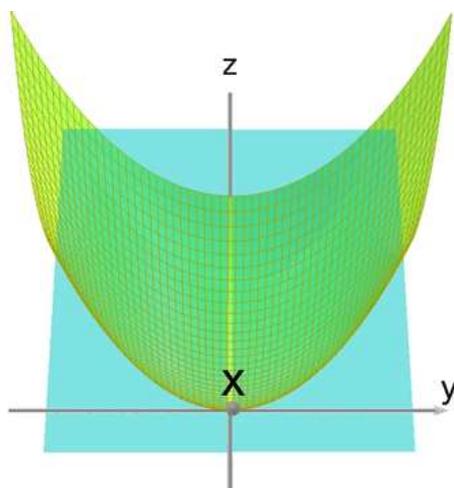
et en fait, nous pourrions écrire son équation sous la forme $z = \text{distance à l'axe } (Oz)$, donc ne dépend que de cette distance. Cette petite vue d'avion vous aidera



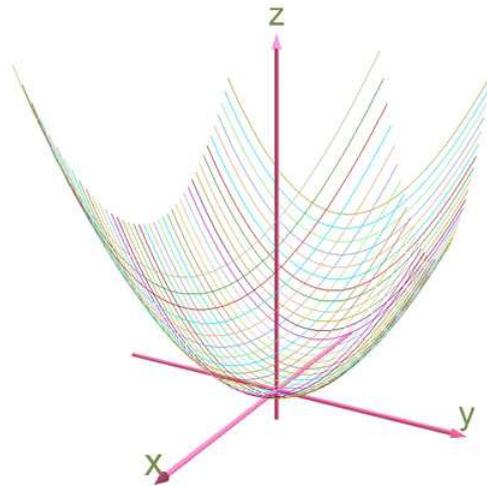
Mais cela ne nous éclaire pas encore tout à fait sur le terme *révolution*. Alors continuons à couper



Téhessin : Je commence à voir clair dans votre jeu : vous avez coupé la surface initiale par le plan d'équation $x = 0$, donc nous obtenons une courbe d'équation $z = y^2$ dans ce plan qui est une parabole



Mathémator : Et voici le parabolôide de révolution généré par ces paraboles en travaillant dans des plans parallèles au plan yOz .



et la petite instruction MuPAD qui l'a générée

• `plot3d([Mode = Curve, [u,t, u^2+t^2], t = [-10, 10], LineWidth=15]$u=-10..10)`

En fait, vous comprendrez aisément que si, dans une équation, x et y n'interviennent que sous la forme $x^2 + y^2$, alors l'équation de la surface ne dépend que de z et la distance à l'axe (Oz). Des coupes parallèles au plan (xOy) seront donc des cercles et la surface sera donc de révolution.

Voici un petit exercice pour vous entraîner :

Exercice XXIII-5

Dites un maximum de choses intelligentes sur les surfaces d'équations respectives $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$, $z = \sin(x^2 + y^2)$, $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ (moitié d'hyperboloïde à une nappe), $z = -\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ (moitié d'hyperboloïde à deux nappes)

C - CÔNES, CYLINDRES ET COMPAGNIE

C - 1 : CYLINDRES

Mathémator : Vous savez ce qu'est un cylindre?

Téhessin : C'est un tube sur lequel on enroule du papier.

Mathémator : (*Vivement le mois de juin que je m'en débarrasse*) Splendide définition! Au moins avez-vous en tête la forme de cette surface. Pensez maintenant à un rouleau compresseur (*j'te ficheraï d'sous moi*). Vous avez remarqué qu'il tourne autour d'un axe : première remarque?

Téhessin : J'imagine aisément que c'est une surface de révolution, donc x et y vont intervenir sous la forme $x^2 + y^2$.

Mathémator : Vous me rassurez un peu. Maintenant, que pourriez-vous dire sur la position des points situés sur la surface du rouleau compresseur par rapport à l'axe?

Téhessin : Ils sont tous à la même distance!

Mathémator : Il faut l'espérer pour le confort du conducteur. Ainsi, si l'on considère un cylindre d'axe (Oz), la distance d'un point du cylindre à l'axe vaut $x^2 + y^2$ et est constante et égale à R^2 par exemple, donc on pourra

définir le cylindre comme étant la surface d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ car tout point du cylindre vérifie cette équation et tout point dont les coordonnées vérifient cette équation est sur le cylindre.

Avez-vous une remarque à faire en comparant ce résultat à ceux des paragraphes précédents?

Téhessin : Ben, ya pas d' z .

Mathémator : C'est bien mon brave Téhessin, mais qu'est-ce que ça veut dire « ya pas d' z »? Pouvez-vous définir une fonction f caractérisant le cylindre sous la forme $z = f(x,y)$ comme nous l'avions fait précédemment?

Téhessin : En fait, pour un x et un y donné, il y a une infinité de points appartenant au cylindre correspondants à autant de valeurs de la cote z : il ne s'agit donc pas de la représentation graphique d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Mathémator : Heureux de voir vos neurones se connecter à nouveau. Il existe en effet des courbes qui ne sont pas la représentation graphique d'une fonction de deux variables réelles mais dont l'étude est importante.

Définition XXIII-2

Le cylindre d'axe (Oz) et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R de (Oz)

Intéressons-nous maintenant aux sections d'un cylindre par des plans parallèles aux plans de coordonnées.

C - 2 : Intersection d'un cylindre d'axe (Oz) avec un plan parallèle à (xOy)

Téhessin : Un plan \mathcal{P} parallèle à (xOy) a une équation du type $z = c$ et le cylindre a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$.

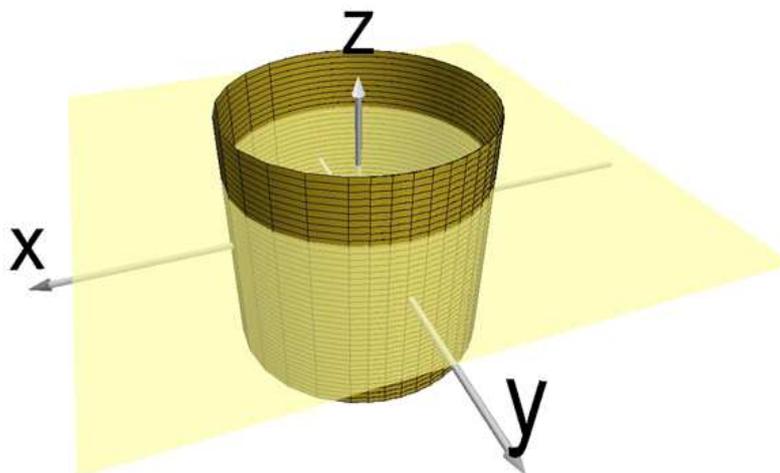
Les coordonnées d'un point M appartenant à l'intersection vérifient le système
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = c \end{cases}$$

Mathémator : Soit Ω le point d'intersection du plan \mathcal{P} avec l'axe (Oz) . On munit ce plan d'un repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Quelles sont les coordonnées de Ω dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?

Téhessin : Le point appartenant à l'axe (Oz) , alors l'abscisse et l'ordonnée sont nulles, et comme il appartient à \mathcal{P} , sa cote vaut c , donc ses coordonnées sont $(0,0,c)$.

Mathémator : Soit M un point de l'intersection du cylindre et du plan. Si ses coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont (x,y,c) , alors ses coordonnées dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ sont (x,y) et vérifient $x^2 + y^2 = R^2$. Quel ensemble décrit ce point dans le plan \mathcal{P} ?

Téhessin : L'équation $x^2 + y^2 = R^2$ est celle d'un cercle dans le plan, de rayon R et de centre l'origine du repère, donc ici Ω



Mathémator : Parfait...

Propriété XXIII-1

La section d'un cylindre d'axe (Oz) par un plan parallèle à (xOy) est un cercle.

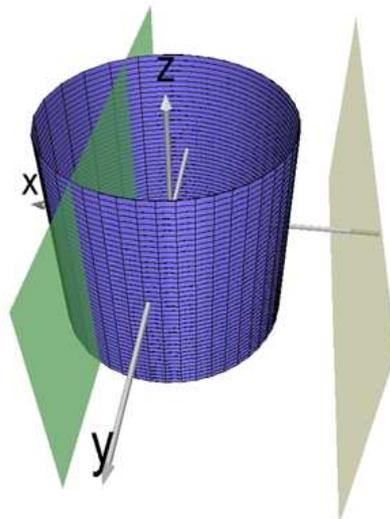
C-3 : Intersection d'un cylindre d'axe (Oz) avec un plan parallèle à (yOz)

Mathémator : Coupons maintenant par un plan d'équation $x = \lambda$. Un point M de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ appartient à l'intersection si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y^2 = R^2 - \lambda^2 \end{cases}$$

Deux cas se présentent alors :

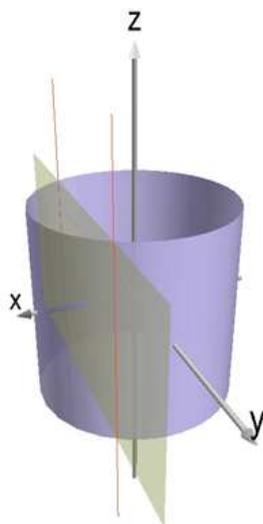
- ▷ si $|\lambda| > R$, alors notre système a peu de chance d'avoir de solution et l'intersection est donc vide, i.e. le plan ne coupe pas le cylindre.
- ▷ sinon, la petite figure suivante devrait vous inspirer



Téhessin : Eh bien $R^2 - \lambda^2$ étant positif, on obtient

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \sqrt{R^2 - \lambda^2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\sqrt{R^2 - \lambda^2} \end{cases}$$

D'après le dessin, ça devrait caractériser deux droites



Mathémator : En effet, car cela cache les représentation paramétriques de deux droites :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \sqrt{R^2 - \lambda^2} \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\sqrt{R^2 - \lambda^2} \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Attention ! Il faut distinguer ici trois paramètres de natures différentes

- ▷ le paramètre R qui est constant pour un cylindre donné
- ▷ le paramètre λ qui est constant pour un plan donné
- ▷ le paramètre k qui est le paramètre de la représentation paramétrique des droites...

Nous pouvons alors généraliser ce résultat sous la forme suivante, modulo un changement de repère

Propriété XXIII-2

La section d'un cylindre d'axe (Oz) par un plan parallèle à (Oz) est une droite ou une réunion de droites.

C - 4 : CÔNES

Mathémator : Il faut d'abord s'entendre sur une définition. Avec le cylindre, nous aurions pu aussi bien commencer par dire que c'était l'ensemble engendré par la rotation d'une droite autour d'un axe qui lui est parallèle (encore une surface *réglée*) ou encore l'ensemble engendré par la translation d'un cercle selon des vecteurs colinéaires à \vec{k} ². Cette dernière définition plaît mieux aux mathématiciens car elle permet de se passer de la notion de distance et donc de travailler dans des espaces plus généraux et légers. Pour les cônes, nous pourrions nous passer également de distances³, mais nous utiliserons une définition hybride⁴ plus pratique à notre niveau

2. Il existe une définition plus générale des cylindres : un ensemble \mathcal{C} est un cylindre si l'on peut lui associer un vecteur \vec{u} tel que, pour tout point M de \mathcal{C} , la droite qui contient M et de direction \vec{u} est incluse dans \mathcal{C} , c'est à dire qu'il s'agit d'une surface réglée qui peut être engendrée par des droites parallèles. Dans ces conditions, un plan, l'espace tout entier, l'ensemble vide sont des cylindres...

3. en disant que \mathcal{C} est un cône de sommet S si, pour tout point M de \mathcal{C} , La droite (SM) est totalement incluse dans \mathcal{C}

4. car elle utilise un cercle, donc des distances

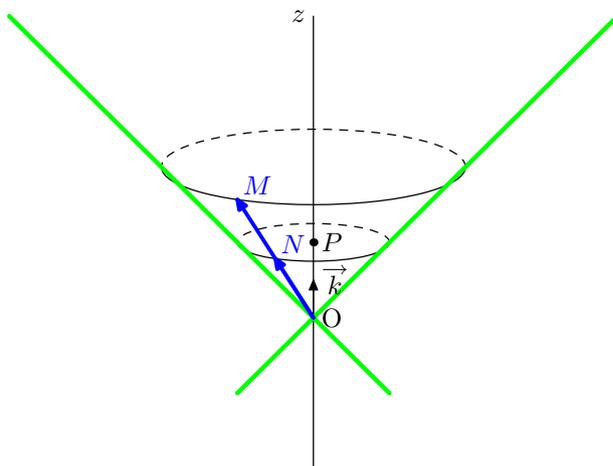
Définition XXIII-3

Soit $T(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace, Soit P un point de l'axe (Oz) et \mathcal{C} un cercle de centre P . L'ensemble formé par le point O et tous les cercles images de \mathcal{C} par toutes les homothéties de centre O est le cône de sommet O , d'axe (Oz) et de cercle directeur \mathcal{C}

Ça nous rappelle nos bonnes vieilles transformations du plan, même si l'on travaille avec une dimension supplémentaire...

Téhessin : Que d'émotions, et je suis prêt à admettre qu'une telle définition peut vous faire plaisir, mais je ne vois pas trop ce qu'on pourrait en tirer en termes d'équations.

Mathémator : Et bien, regardez plutôt ce dessin



Appelons \mathcal{C} le cercle de centre $P(0,0,z_P)$, de rayon R et situé dans le plan d'équation $z = z_P$ avec z_P non nul⁵ et Γ le cône de sommet O , d'axe (O, \vec{k}) et de cercle directeur \mathcal{C} .

Considérons maintenant un point $M(x,y,z)$ de Γ . D'après notre définition, il existe un point N appartenant à \mathcal{C} image de M par une homothétie de centre O , donc il existe un réel λ tel que $\vec{OM} = \lambda \vec{ON}$, i.e. $x = \lambda x_N$, $y = \lambda y_N$, $z = \lambda z_N$.

Or le point N appartient au cercle \mathcal{C} , donc ses coordonnées vérifient $x_N^2 + y_N^2 = R^2$. Qu'en déduisez-vous pour x , y et z ?

Téhessin : Ben , $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = R^2$.

Mathémator : Ah, vous ne dormiez pas : tant mieux ! Il est plus joli d'écrire $x^2 + y^2 = \lambda^2 R^2$.

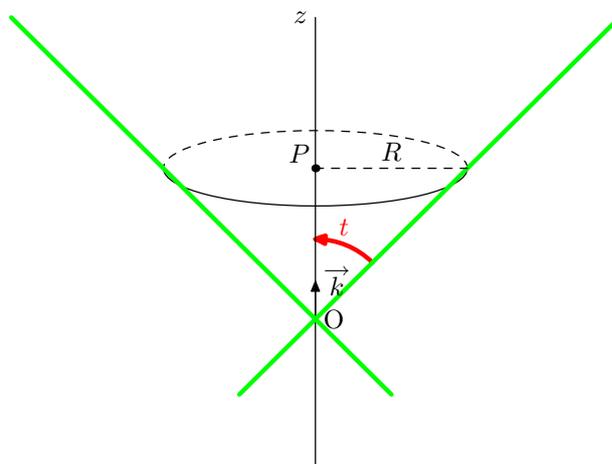
Téhessin : Donc nous avons notre équation !

Mathémator : Pas vraiment car le paramètre λ dépend du choix de M et on ne sait rien sur lui, si ce n'est que $\lambda = z/z_N$. En remplaçant, nous obtenons $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{z_N^2} z^2$ ce qui est plus intéressant : l'équation du cône dépend du rayon du cercle directeur pour une cote donnée.

Téhessin : C'est en fait son « écartement », si j'ose m'exprimer ainsi.

5. pourquoi?

Mathémator : Excellente idée. D'ailleurs, on a l'habitude de paramétrer le cône en fonction du demi-angle au sommet



On obtient alors facilement que $\tan t = \frac{R}{z_N}$, donc notre cône est inclus dans l'ensemble d'équation

$$x^2 + y^2 = \tan^2 t z^2$$

Téhessin : Pourquoi « est inclus dans »? On a bien trouvé une équation.

Mathémator : Certes, mais pas forcément du cône. En effet, on a juste prouvé que SI un point appartient au cône ALORS nécessairement, ses coordonnées vérifient cette équation. Il reste à vérifier la réciproque, à savoir que SI les coordonnées d'un point vérifient l'équation ALORS il est sur le cône.

Supposons donc que les coordonnées (x, y, z) d'un point M vérifient $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{z_0^2} z^2$ avec $z_0 \in \mathbb{R}^*$: comment caractériser qu'un point appartient au cône de sommet O et de cercle directeur \mathcal{C} à l'aide de la définition?

Téhessin : Il faudrait trouver un point N appartenant à \mathcal{C} tel que M soit son image par une homothétie de centre O .

Mathémator : Il ne faut pas oublier le cas particulier du point O : si $x = y = z = 0$, l'équation est vérifiée et O appartient bien à notre ensemble. Ensuite, notre tâche ne va pas être si dure connaissant la démonstration précédente.

Tout d'abord, dans quel cas un point de notre ensemble peut avoir une cote nulle?

Téhessin : $z = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x^2 = 0$ et $y^2 = 0 \iff x = 0$ et $y = 0$.

Mathémator : Donc O est le seul point de l'ensemble à avoir une cote nulle. Pour tous les autres, nous pouvons introduire le point N de coordonnées $\left(\frac{z_0}{z}x, \frac{z_0}{z}y, z_0\right)$ avec $z_0 \neq 0$. Quel est l'intérêt?

Téhessin : $x_N^2 + y_N^2 = \frac{z_0^2}{z^2}x^2 + \frac{z_0^2}{z^2}y^2 = \frac{z_0^2}{z^2}(x^2 + y^2) = \frac{z_0^2}{z^2} \frac{R^2}{z_0^2} z^2 = R^2$

Mathémator : Donc N appartient bien au cercle \mathcal{C} et vérifie $\overrightarrow{ON} = \frac{z_0}{z} \overrightarrow{OM}$ i.e. $\overrightarrow{OM} = \frac{z}{z_0} \overrightarrow{ON}$, ce que nous cherchions à montrer.

Nous pouvons donc enfin écrire

Propriété XXIII-3

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le cône de sommet O et d'axe (Oz) admet une équation du type

$$x^2 + y^2 = \tan^2 t z^2$$

avec t la mesure du demi-angle géométrique au sommet du cône.

C-5 : Cônes et coniques

Les intersections de cônes avec des plans sont assez remarquables, tellement remarquables que les courbes engendrées par ces sections ont fait l'objet d'innombrables études au cours des siècles. Pour ce qui est des sections par des plans parallèles à (xOy) , il est facile de montrer qu'on obtient des cercles. Pour le reste, les courbes obtenues portent des noms familiers : parabole, hyperbole, ellipse et constituent la famille des coniques. On les étudiait il y a peu de temps en terminale. Mais le programme est actuellement suffisamment chargé par rapport aux horaires pour les laisser de côté. L'étude des sections de cônes est pourtant l'occasion rêvée de les évoquer à l'occasion d'exercices guidés.

Exercice XXIII-6 Section d'un cône par un plan parallèle à (Oz)

Le résultat général est admis en terminale, mais rien n'empêche de le démontrer dans un cas particulier : étudiez l'intersection du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ avec le plan d'équation $x = 1$.

On est donc amené à étudier dans le plan $x = 1$ la courbe \mathcal{H} d'équation $z^2 = y^2 + 1$. Le problème, c'est que ce n'est pas la courbe représentative d'une fonction. On peut malgré tout se débrouiller en remarquant que \mathcal{H} est la réunion des courbes d'équations $z = \sqrt{y^2 + 1}$ et $z = -\sqrt{y^2 + 1}$. Occupons-nous de la première qui est la représentation graphique de la fonction

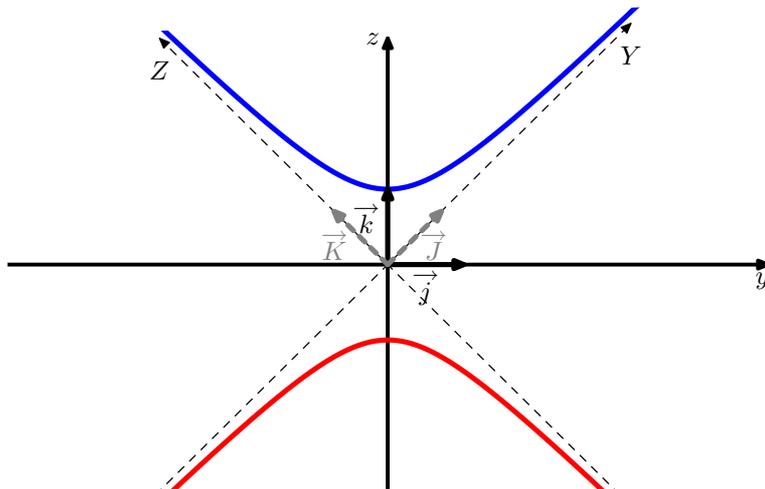
$$f : y \mapsto \sqrt{y^2 + 1}$$

Cette fonction est définie sur \mathbb{R} . Après quelques calculs, on obtient le tableau suivant

y	$-\infty$	0	$+\infty$
f(y)	$+\infty$	1	$+\infty$

On montre enfin que les droites d'équations $z = y$ et $z = -y$ sont asymptotes à la courbes.

Pour obtenir l'autre morceau, il suffit d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe (Oy) . On obtient donc la courbe suivante :



ce qui nous fait tout de suite penser à une hyperbole qui aurait tourné d'un quart de tour autour de O .

Nous allons donc travailler dans un nouveau repère (O, \vec{J}, \vec{K}) pour retrouver l'équation habituelle d'une hyperbole au sens du lycée.

Compte tenu de l'angle de mesure $\pi/4$, on pose $\vec{J} = \frac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{K} = \frac{-\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$

On obtient alors $\vec{k} = \frac{\vec{J} + \vec{K}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{j} = \frac{\vec{J} - \vec{K}}{\sqrt{2}}$

Or $\overrightarrow{OM} = y\vec{j} + z\vec{k}$, donc $\overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z)\vec{J} + \frac{\sqrt{2}}{2}(z-y)\vec{K} = Y\vec{J} + Z\vec{K}$

Nous obtenons donc le système de changement de coordonnées $\begin{cases} Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z) \\ Z = \frac{\sqrt{2}}{2}(z-y) \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y-Z) \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y+Z) \end{cases}$

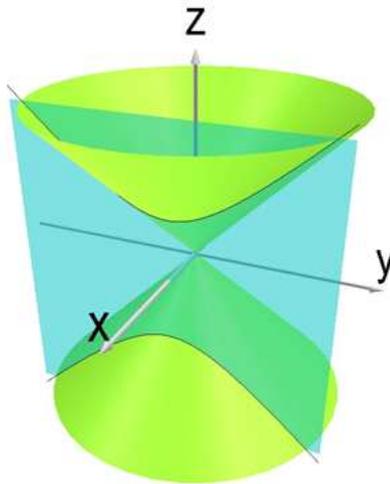
En ré-injectant dans l'équation de la courbe dans (O, \vec{j}, \vec{k}) , nous obtenons $\frac{1}{2}(Y+Z)^2 - \frac{1}{2}(Y-Z)^2 = 1$, soit, après simplification, $Z = \frac{1}{2Z}$, équation familière d'une hyperbole.

La démonstration dans le cas général n'est pas exigible en terminale bien qu'abordable. Seul le résultat est à connaître

Propriété XXIII-4

Résultat admis

L'intersection d'un cône d'axe (Oz) avec un plan parallèle à (Oz) est une hyperbole



Exercice XXIII-7 Section elliptique

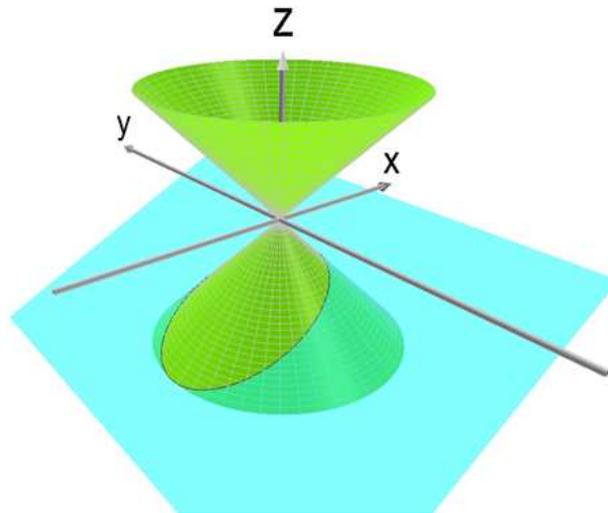
On veut étudier l'intersection du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ avec le plan d'équation $x = 2z + 1$. La résolution du système associé nous conduit à considérer la courbe d'équation $y^2 + 3z^2 + 4z + 1 = 0$. Comme nous le faisons pour les cercles, nous allons mettre sous forme canonique.

Après calcul, nous obtenons $\left(z + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}y^2 = \frac{1}{9}$. L'idée est alors d'effectuer un changement de repère en posant

$\begin{cases} Y = y \\ Z = z + 2/3 \end{cases}$. Dans le nouveau repère, la courbe admet pour équation

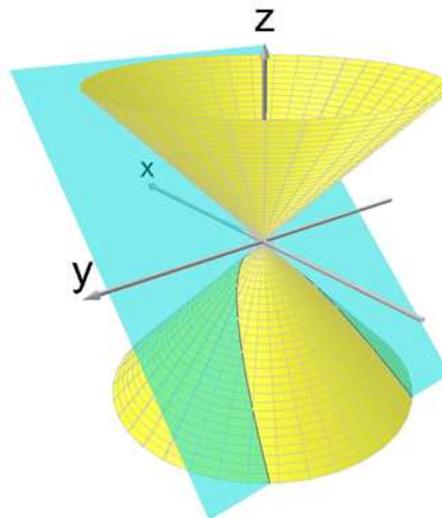
$$\frac{Y^2}{(1/9)^2} + \frac{Z^2}{(1/3)^2} = 1$$

C'est presque l'équation d'un cercle, mis à part les coefficients $(1/9)^2$ et $(1/3)^2$ qui viennent jouer les trouble-fêtes. Vous comprendrez alors qu'il s'agit d'un cercle « déformé » qu'on appelle en fait une ellipse.



Exercice XXIII-8 Section parabolique

Étudiez l'intersection du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ et du plan d'équation $x = z + 1$.



C - 6 : Exercices

Exercice XXIII-9 Un des rares exercices tombés au bac

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0; 5; 5)$ et $B(0; 0; 10)$.

- 1) Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère (O, \vec{j}, \vec{k}) .
On note \mathcal{C} le cercle de centre B passant par A.
Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle \mathcal{C} .

- 2) On nomme \mathcal{S} la sphère engendrée par la rotation du cercle \mathcal{C} autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz) .
- Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.
 - Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère \mathcal{S} .
Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.
 - Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.
- 3) On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x = 1$.
Dans P_1 , l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.
- 4) Soit $M(x, y, z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

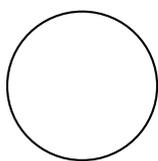


Figure 1

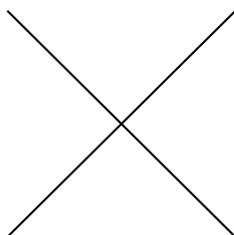


Figure 2

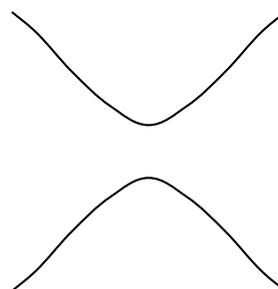


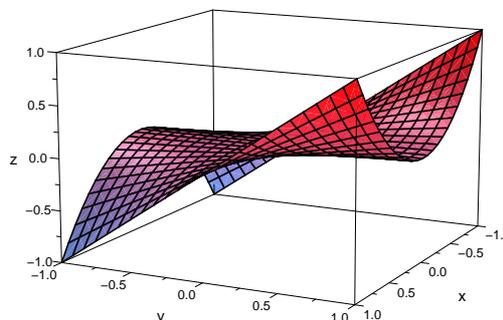
Figure 3

Un autre exercice de Bac

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la surface \mathbf{T} d'équation: $x^2y = z$ avec $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$.

La figure ci-contre est une représentation de la surface \mathbf{T} , dans le cube de centre O et de côté 2.



- Éléments de symétrie de la surface \mathbf{T} .
 - Montrer que si le point $M(x, y, z)$ appartient à \mathbf{T} , alors le point $M'(-x, y, z)$ appartient aussi à \mathbf{T} .
En déduire un plan de symétrie de \mathbf{T} .
 - Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de \mathbf{T} .
- Intersections de la surface \mathbf{T} avec des plans parallèles aux axes.
 - Déterminer la nature des courbes d'intersection de \mathbf{T} avec les plans parallèles au plan (xOz) .
 - Déterminer la nature des courbes d'intersection de \mathbf{T} avec les plans parallèles au plan (yOz) .
- Intersections de la surface \mathbf{T} avec les plans parallèles au plan (xOy) d'équations $z = k$, avec $k \in [0 ; 1]$.
 - Déterminer l'intersection de la surface \mathbf{T} et du plan d'équation $z = 0$.

- b) Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0, 0, k)$. Déterminer, dans le repère $(K ; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la courbe d'intersection de Γ et du plan d'équation $z = k$.
- c) Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $(K ; \vec{i}, \vec{j})$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

4) On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface \mathbf{T} .

$$(D) = M(x, y, z) \in (E) \quad \text{avec} \quad 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 ; 0 \leq z \leq x^2 y.$$

- a) Pour $0 < k \leq 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la **question 3. c.**. C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées (x, y, z) tels que $y \geq \frac{k}{x^2}$ et $z = k$.
Calculer en fonction de k l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire, de cette surface.
- b) On pose $S(0) = 1$; calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D) .
On rappelle que $V = \int_0^1 S(k) dk$.

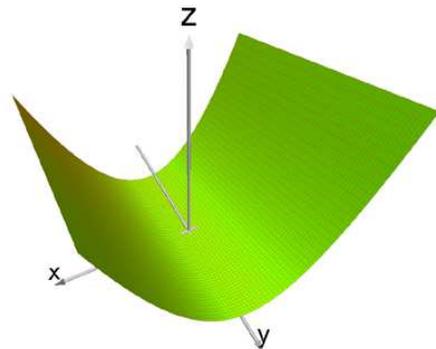
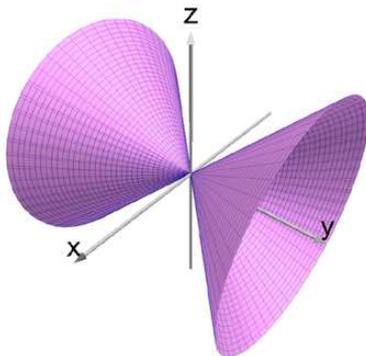
Exercice XXIII-10 Cône caché

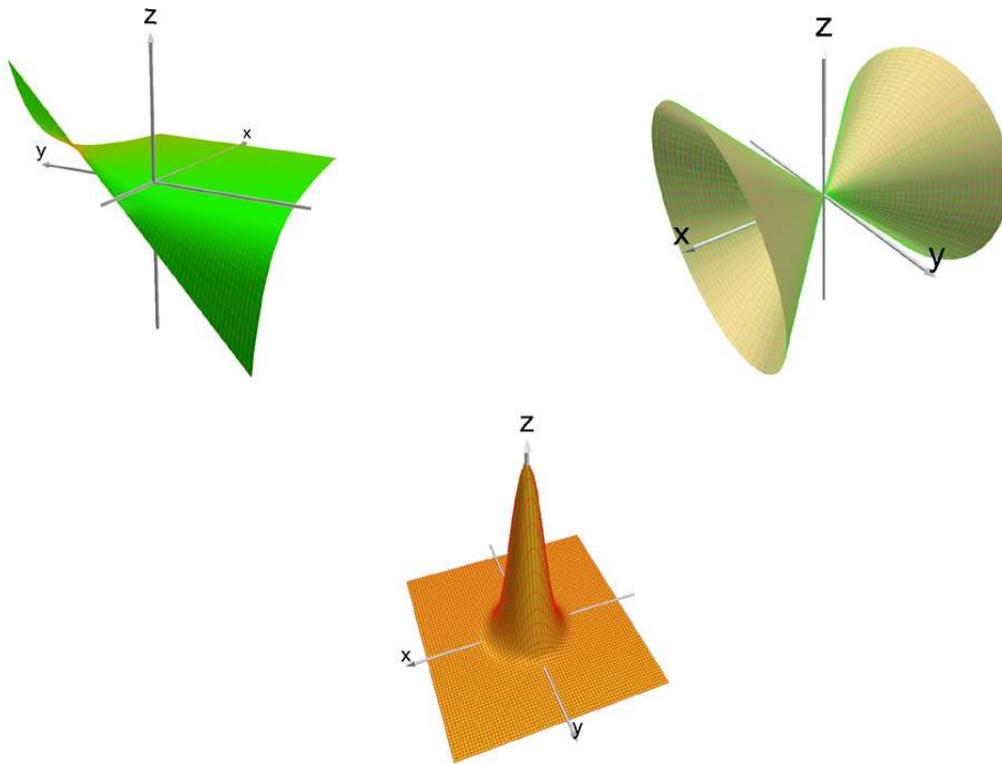
Retrouver le cône qui se cache derrière l'équation $x^2 + y^2 - 4z^2 - 6x + y - 8z + 6 = 0$

Exercice XXIII-11 ouze ou

Voici des équations et des graphiques : il s'agit de les relier.

$$a) z = \exp(-x^2 - y^2) \quad b) z = x^2 + y \quad c) x^2 + z^2 = y^2 \quad d) y^2 + z^2 = x^2 \quad e) z = \frac{x + 3y}{(x + 1)^2}$$





D - SURFACES MOLLES : À LA DÉCOUVERTE DE LA TOPOLOGIE

Introduction

C'est le dernier cours de Spécialité : il est donc temps de jouer un peu. Pour rester en phase avec le chapitre, nous allons jouer avec des surfaces molles, déformables à souhait, un peu comme si elles étaient faites en pâte à modeler, bref, nous allons jouer au topologue.

La topologie est à la fois une branche des mathématiques (où la recherche est encore très active), et une « boîte à outils » utilisée dans toutes les autres branches des maths. Si l'on veut définir les concepts topologiques formellement, on s'appuie sur la théorie des ensembles ; après un chemin assez long (allant du DEUG à la Maîtrise), on arrive à définir et à étudier mathématiquement des objets comme les surfaces et leur généralisation en dimensions supérieures.

Ici, on va faire le choix inverse : pour une fois, nous allons raisonner sur des *objets non formalisés*, c'est-à-dire sans donner de définition précise, en se contenant d'idées intuitives. L'inconvénient est que ce flou sur les définitions se retrouve dans les démonstrations : on aura un peu moins de certitude que d'habitude sur les résultats obtenus. L'avantage est qu'on n'est pas obligé d'attendre la Maîtrise de maths pour étudier les surfaces...

A la fin, on essaiera de faire le lien entre les objets informels vus ici et le point de vue formel des cours de maths habituels.

Polyèdres et polygônes

Comptabilité

Comptez le nombre de sommets, d'arêtes et de faces pour les polyèdres des figures 1, 2, 3 et 4. Remplissez le tableau suivant.

	$n^0 1$	$n^0 2$	$n^0 3$	$n^0 4$	$n^0 5$	$n^0 6$	$n^0 7$
sommets							
arêtes							
faces							

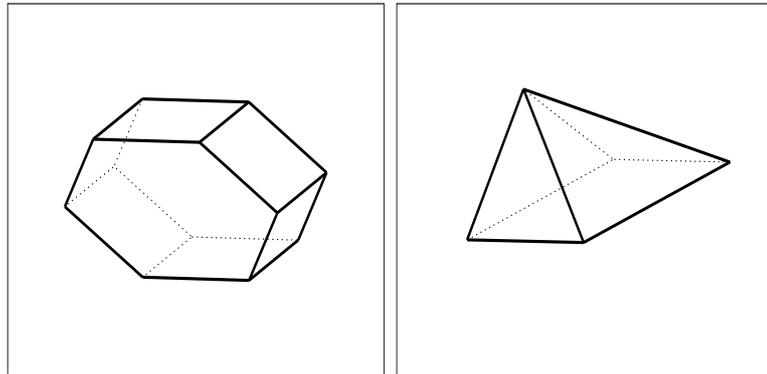


FIG. 1 – Exemples de polyèdres (1)

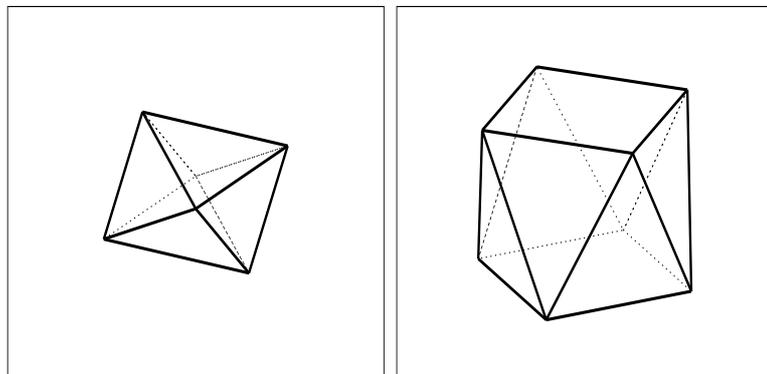


FIG. 2 – Exemples de polyèdres (2)

La relation d'Euler

Le mathématicien Euler (toujours les mêmes ...) a trouvé une formule très simple reliant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces, et *valable dans tous les polyèdres*. A l'aide des exemples de la question précédente, pouvez-vous retrouver cette relation ?

Cas des polygones du plan

Dessinez un polygone (triangle, carré, etc.), et découpez-le en un certain nombre de polygones plus petits. Ici encore, comptez le nombre de sommets, d'arêtes et de petits polygones. Quel relation y a-t-il entre ces trois nombres ? Essayez d'autres exemples.

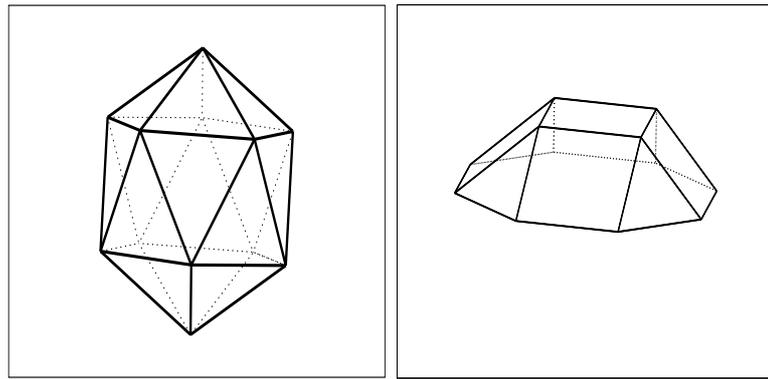


FIG. 3 – Exemples de polyèdres (3)

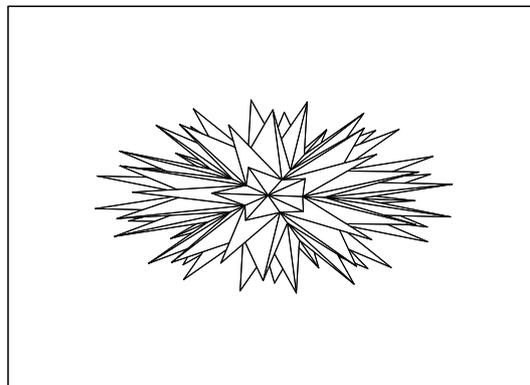


FIG. 4 – Et un dernier polyèdre ??...

Les surfaces, objets topologiques

Dorénavant, on notera toujours S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. On a donc obtenu les résultats suivants :

THÉORÈME (*polyèdres*) Pour tout polyèdre, le nombre ...

THÉORÈME (*découpages des polygones*) Pour tout découpage d'un polygone du plan, le nombre ...

Ces deux théorèmes concernent les polyèdres et les polygones, qui sont des objets géométriques. Nous allons maintenant examiner ces théorèmes sous l'angle de la topologie.

Sur la plan intuitif, on peut dire que la topologie est une géométrie « molle », qui aurait oublié comment évaluer les notions géométriques de distance et d'angle ; c'est la théorie mathématique où l'on s'autorise à étirer, comprimer, tordre une forme, mais sans la déchirer ou la coller, et sans l'écraser. Quand on peut passer d'une forme à une autre par ce type de déformations, on dit qu'elles sont *topologiquement équivalentes*. Ainsi, un carré est topologiquement équivalent à un cercle, puisqu'on peut déformer continûment un carré en un cercle (voir figure 5). Un autre exemple est donné par la surface d'un tore (comme les bouées en caoutchouc) et celle d'une tasse à café (avec une anse).⁶

Les lettres

Comme premier exercice de topologie informelle, regardons les lettres de l'alphabet (en capitales, et sans enluminures) comme des dessins dans le plan. Parmi ces lettres, lesquelles sont topologiquement équivalentes, lesquelles sont topologiquement différentes ? Combien y a-t-il de lettres dans l'alphabet d'un topologue ?

6. On peut bien sûr définir de manière précise (en termes de théorie des ensembles) l'équivalence topologique (voir la fin du texte) ; mais nous allons nous contenter de raisonner avec cette définition intuitive.

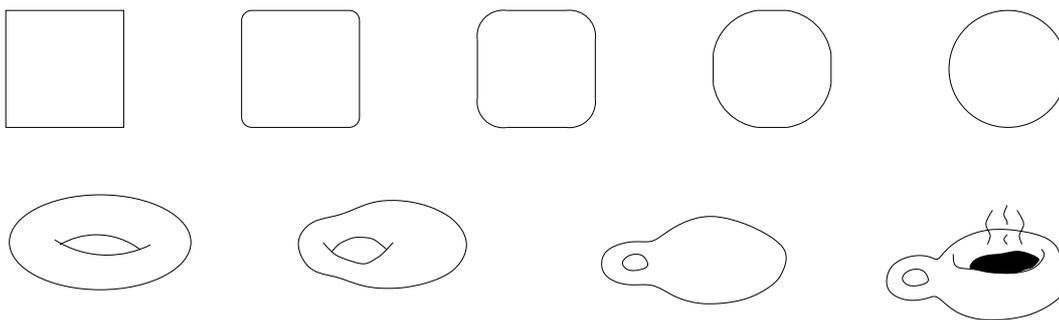


FIG. 5 – Un carré se déformant en cercle, et un tore se changeant en tasse à café

Construction de quelques surfaces

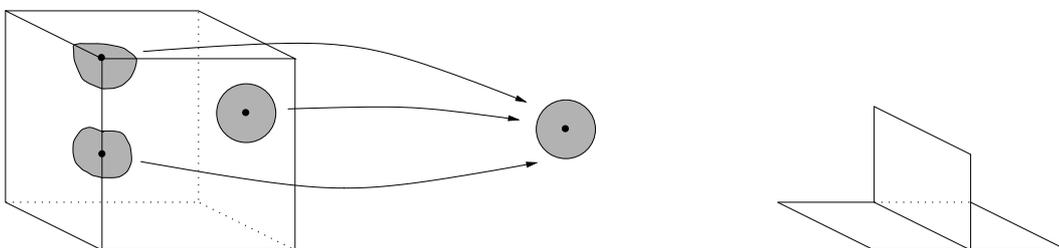


FIG. 6 – Un cube, et trois petits morceaux que l'on peut déformer en un disque. Par contre, le dessin de droite n'est pas topologiquement équivalent à un disque.

Une *surface*⁷ est une forme dont *tous les morceaux assez petits sont topologiquement équivalents à un petit disque du plan*. Par exemple, la surface d'un cube est une surface, qui est topologiquement équivalente à la surface d'une sphère⁸. Par contre, si vous rajoutez un mur dans le cube (vous changez le studio en un deux-pièces!), la réunion des murs n'est plus une surface, parce qu'il y a des points en lesquels trois cloisons se rencontrent, et que cette forme n'est pas topologiquement équivalente à un disque du plan. Ceci est illustré sur la figure 6.

- 1) Citez des surfaces topologiquement équivalentes à la sphère. Citez des surfaces qui ne sont pas topologiquement équivalentes à la sphère.
- 2) Découpez des bandes de papier, et recollez les extrémités de différentes manières : sans demi-tour (on obtient un *anneau*) ; avec un demi-tour (on obtient un *ruban de Möbius*) ; avec deux demi-tours ; avec trois demi-tours.
- 3) Découpez chacune des surfaces selon le milieu de la bande d'origine (le méridien). Que se passe-t-il?

Triangulations des surfaces, et caractéristique d'Euler-Poincaré

Une *triangulation* d'un polygone du plan est un dessin comme ceux de la figure 8, constitué d'un certain nombre de *sommets* et d'*arêtes* (éventuellement courbées) reliant les sommets, de manière à ce que si vous découpez selon les arêtes, le plan se retrouve décomposé en "polygones tordus", c'est-à-dire en morceaux topologiquement équivalents à des polygones⁹. Ces polygones topologiques sont appelés *faces* de la triangulation.¹⁰ Ainsi, les découpages de polygones (question de la partie précédente) étaient des cas particuliers de triangulations du plan (avec des arêtes non courbées).

7. En termes savants, on dit aussi *variété de dimension 2*.

8. Attention à ne pas confondre la *surface* de la sphère avec le volume qu'elle renferme (ce volume est une variété de dimension 3, ce n'est bien sûr pas une surface).

9. Sauf la partie non bornée.

10. On devrait peut-être dire *polygonulation* plutôt que triangulation...

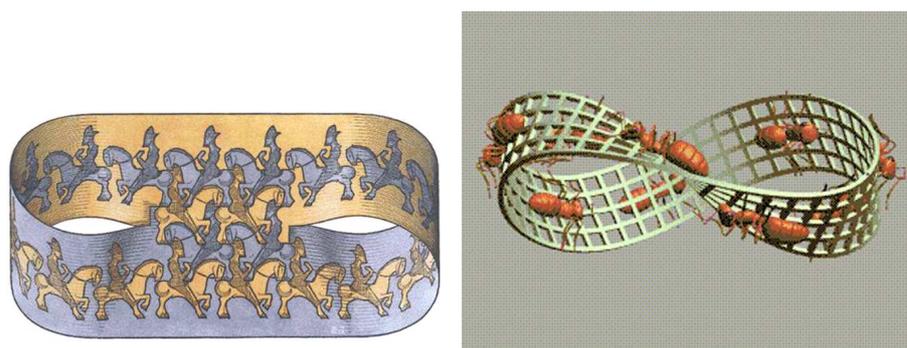


FIG. 7 – Le ruban de Möbius vu par Escher

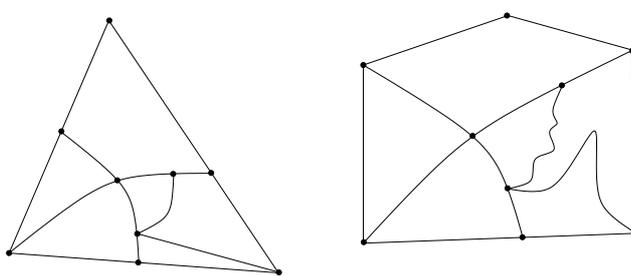


FIG. 8 – Deux triangulations topologiquement équivalentes

Deux triangulations sont considérées comme identiques si on peut passer de l'une à l'autre en déformant continûment le plan. Ainsi, les deux triangulations de la figure 8 sont considérées comme étant les mêmes.

On définit de la même manière une triangulation sur la sphère, ou sur une autre surface. Chacun des polyèdres de la première partie définit une triangulation de la sphère, voyez-vous pourquoi?

Faisons la remarque suivante: *les raisonnements à la fin de la première partie n'utilisaient pas le fait que les arêtes des triangulations n'étaient pas courbées. Par conséquent, le théorème sur les découpages de polygones se généralise aux triangulations du plan:*

THÉORÈME (triangulation des polygones) *Pour toute triangulation d'un polygone du plan, le nombre ...*

Le but de cette question est de savoir ce que deviennent les résultats de la première partie (concernant le nombre $S - A + F$ pour les polyèdres et les polygones du plan) pour les autres surfaces.

Pour quelques-unes des surfaces suivantes (au choix), dessiner une triangulation (ou plusieurs), et calculez le nombre $S - A + F$:

- un disque (Remarque: *on l'a déjà fait...*).
- une sphère (Remarque: ça aussi on l'a déjà fait !!)
- un cylindre ou un anneau (Aide: N'oubliez pas que le cylindre est mou: vous pouvez le mettre « à plat »)
- un ruban de Möbius (Aide: c'est plus facile de dessiner sur la bande de départ qu'après le recollement, en *imaginant* qu'on va recoller la bande ensuite...).
- un tore (Aide: diviser par exemple la surface du tore en quatre parties égales comme sur la figure ci-dessous.)
- un disque avec deux trous¹¹.

Énoncez les généralisations du théorème de triangulation des polygones aux surfaces que vous avez étudiées.

11. Cette surface s'appelle un *pantalon*; voyez-vous pourquoi?

Application

- 1) Dire sans calcul ce que vaut le nombre $S - A + F$ pour le polyèdre de la figure 4, puis pour celui de la figure 9.

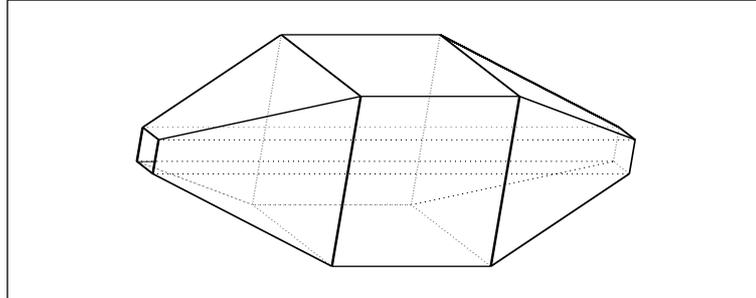


FIG. 9 – Quelle est cette surface ?

Conclusion

On peut énoncer le théorème suivant (que l'on admettra !!!):

THÉORÈME Soit S une surface, et T une triangulation de S . Alors le nombre $(S-A+F)$ ne dépend pas de la triangulation T , il ne dépend que du type topologique de la surface S .

Ce nombre est donc un *invariant topologique* associé à la surface S ; on l'appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la surface.

Donner la caractéristique d'Euler-Poincaré des surfaces que vous avez étudiées.

Un lien avec le point de vue du cours : comment définir formellement l'équivalence topologique ?

Reprenons le dessin d'un carré dans le plan qui se déforme en cercle (figure 10). Étant donné un point x du carré,

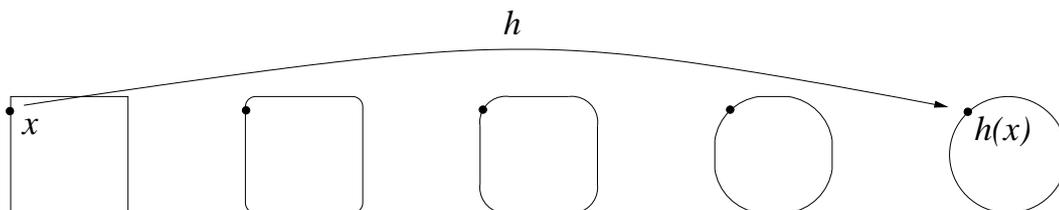


FIG. 10 – Construction de l'application h .

on peut suivre son déplacement durant la déformation; quand la déformation est finie, on obtient ainsi un point $h(x)$ dans le cercle final. En faisant ceci pour chaque point x du carré, on obtient une application h du carré dans le cercle.

Essayez de traduire formellement, sur l'application h , les idées intuitives de la définition d'équivalence topologique donnée plus haut :

- comment rendre compte de l'idée qu'il n'y a pas de déchirure ?
- comment rendre compte de l'idée qu'il n'y a ni écrasement ? ni recollement ?

Sur le plan formel, l'idée de déformation continue est assez lourde à définir ; en réalité, on définit l'équivalence topologique en conservant uniquement les propriétés de la fonction finale h : si E et F sont deux parties du plan (comme le carré et le cercle), elles sont dites topologiquement équivalentes (ou *homéomorphes*) s'il existe une application h de E dans F qui est une bijection, continue, dont la réciproque est continue. Une telle application s'appelle un *homéomorphisme*.

Formellement, la topologie est donc l'étude de toutes les propriétés qui sont conservées par les homéomorphismes. La topologie ne concerne pas uniquement les parties de \mathbb{R}^n : il existe beaucoup d'ensembles sur lesquels on peut mettre des structures topologiques, c'est-à-dire définir des notions d'ouverts et de fermés, et donc de continuité. C'est le cas par exemple des espaces vectoriels de fonctions, ou encore de l'ensemble des courbes du plan ... Ces différentes structures topologiques jouent un rôle très important en Analyse, par exemple dans la transformation de Fourier, ou dans la théorie des distributions. Explications dans un cours de Licence...