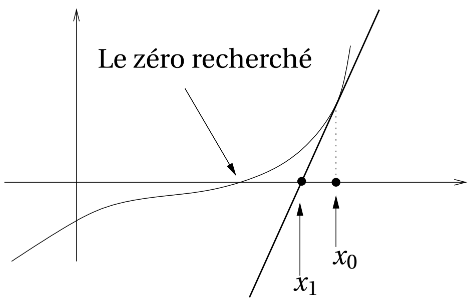
COLLE MAPLE N°4
Analyse numérique : résolution d'une équation par la méthode de Newton

La méthode de Newton (ou méthode des tangentes) est une manière d'obtenir des approximations numériques d'un « zéro » d'une fonction (c'est-à-dire d'un nombre où la fonction s'annule). Dans ce TD, on décrit cette méthode, puis on l'applique au calcul des premières décimales de $\sqrt{2}$. La deuxième partie de l'exercice propose de comparer cette méthode avec la méthode par dichotomie àl'aide de programmes Maple.

• La méthode de Newton

1. Toutes les méthodes de recherche numérique de zéro de fonctions suivent le même principe général : à partir d'une « première bonne approximation » du zéro recherché, trouver une approximation qui soit encore meilleure, puis recommencer...
Voici comment procède la méthode de Newton. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- ▷ On part d'un nombre quelconque x_0 ;
- ▷ à partir de x_0, on calcule un nouveau nombre x_1 de la manière suivante (voir figure) : on trace la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0, et on détermine le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. On appelle x_1 l'abscisse de ce point d'intersection ;
- ▷ et on recommence : on calcule un nouveau nombre x_2 en appliquant le procédé décrit au point 2 où l'on remplace x_0 par x_1 ;
- ▷ *et caetera...*



À partir de cette description graphique de la méthode de Newton, trouver la formule, notée (1), donnant x_1 en fonction de x_0, puis x_{n+1} en fonction de x_n.
Quelles hypothèses doit-on faire sur f et les x_n pour que la formule ait un sens ?

2. On veut utiliser la méthode de Newton pour calculer une approximation décimale du nombre $\sqrt{2}$. Pour ça, on prend la fonction $f(x) = x^2 - 2$ (remarquer que $\sqrt{2}$ est bien un zéro de f !), et on part de $x_0 = 2$.
Vérifier dans un premier temps que la suite (x_n) converge bien vers $\sqrt{2}$.

a) On veut tracer la courbe représentative de la fonction f, représenter graphiquement les nombres x_i, calculer les nombres x_i sous forme de fraction.

   a) Déterminer la fonction `df` associée à la formule (1) trouvée précédemment.

   a) On note `x` la fonction `x :=n->df(x(n-1))`.

   a) On définit la fonction `marche` par : `marche :=k->([x(k),x(k)],[x(k),x(k+1)])`.

   a) À l'aide de `marche, plot, display` représenter graphiquement la courbe représentative de f, la première bissectrice et les différentes « marches » de l'escalier qui mène à la limite de la suite (x_n).

a) Écrire u_6 sous forme de fraction, puis déterminer à l'aide de Maple combien on a déterminé de bonnes décimales de $\sqrt{2}$ avec u_6.

b) Il s'agit maintenant de déterminer une procédure `Newt :=proc(f,p,u0)` qui donnera une approximation de la solution de l'équation $f(x) = 0$ à 10^{-p} près à l'aide de la méthode de Newton.
La procédure contiendra la ligne

```
while abs(evalf(un-aun,p+1))>10^(-p) do
```

et se terminera par

```
printf(`%a est l'approximation trouvée à 10^(-%a) près après %a itérations`,un,p,k);
```

• Comparaison avec la dichotomie

Voici une description de la méthode par dichotomie.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont on connait le signe autour de α : par exemple, f est négative avant α et positive après.

- ▹ On commence par choisir un nombre x_0 que l'on sait être plus petit que le zéro α recherché ;
- ▹ on choisit aussi un nombre x_1 plus grand que α ;
- ▹ on prend pour x_2 le milieu de l'intervalle $[x_0, x_1]$
- ▹ le nombre x_3 est alors déterminé de la manière suivante : si α est dans l'intervalle de gauche (autrement dit si $f(x_2) > 0$), alors on choisit pour x_3 le milieu de cet intervalle ; sinon, on choisit le milieu de l'intervalle de droite.
- ▹ et on recommence : le nombre x_3 découpe le nouvel intervalle en deux intervalles deux fois plus petits, et on choisit pour x_4 le milieu d'un de ces deux intervalles, selon la position de α.
- ▹ *et caetera...*

On cherche à nouveau une approximation de $\sqrt{2}$. Pour ça, on va appliquer la méthode par dichotomie avec $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

1. Montrer rapidement que $\sqrt{2} \in [x_0, x_1]$.

2. Calculer les nombres x_2, x_3, x_4, x_5 sous forme de fraction.

3. Dire, pour x_5, combien on a trouvé de « bonnes » décimales.

4. Déterminer une procédure `dicho :=proc(f,p,a,b)` avec a et b les bornes d'un premier intervalle contenant la valeur cherchée.
On utilisera la fonction `sign(nombre)` qui renvoie 1 si le nombre est positif, -1 sinon.
La procédure contiendra la ligne

```
if sign(evalf(f((bb+aa)/2),p+1))=sign(evalf(f(bb),p+1)) then
```