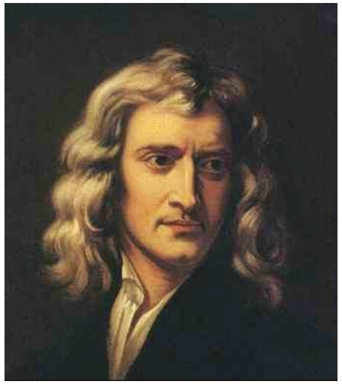
TD 4

Méthodes numériques de résolutions d'équations



Résumé Vous savez résoudre de manière formelle quelques types d'équations mais quid de $x^7 - 17x^6 + 12x^3 - 7x^2 + 18x - 37 = 0$?
Nous allons étudier dans ce chapitre deux méthodes numériques pour obtenir des valeurs approchées de solutions d'équations de type le plus quelconque possible.

A Dichotomie

A 1 Description

On veut résoudre une équation du type $f(x) = 0$ sur un intervalle I avec f une fonction continue, strictement monotone et qui change de signe sur un intervalle $[a, b]$ inclus dans I.
On sait qu'il existe une solution unique α à notre équation sur $[a, b]$.
Soit m le centre de l'intervalle. Trois cas se rencontrent :

- si $f(m) = 0$ alors la vie est belle ;
- si $f(m)$ a le même signe que $f(a)$ alors $\alpha \in [m, b]$ (pourquoi ?) ;
- si $f(m)$ a le même signe que $f(b)$ alors $\alpha \in [a, m]$ (pourquoi ?) ;

On itère ce mécanisme jusqu'à obtenir un intervalle d'amplitude correspondant à la précision demandée sur α : pourquoi cela suffit-il ?
On parle de *dichotomie* du grec $\delta\iota\chi o\tau o\mu\iota\alpha$ qui signifie *division en deux parties égales*.

A 2 Algorithme impératif

Le principe est donc le suivant :

Entrées :
une fonction f
un intervalle $[a, b]$
une précision p
Initialisation : aa⟵ a
bb⟵ b
compteur⟵ 0`// on compte le nombre d'itérations`
début
  tant que *bb-aa*$\geqslant p$ **faire**
    si *le signe de* $f((aa+bb)/2)$ *est le même que le signe de* $f(bb)$
    alors
      bb⟵ (aa+bb)/2
    sinon
      aa⟵ (aa+bb)/2
    k⟵ k+1
  retourner *L'approximation de la solution et le nombre d'itérations*
fin

Algorithme 1 : dichotomie

A 3 Procédure MAPLE

Il ne reste plus qu'à traduire ceci en MAPLE en créant une procédure `dicho:=proc(f,a,b,p)`... Il faudra faire attention à la commande `evalf` : si

la précision est inférieure à 10^{-10}, il peut y avoir des erreurs si on n'y prend pas garde...
Testez sur des équations et des précisions diverses.
Par exemple quel problème résout `dicho(x^2-2,1,2,30)` ?

A 4 Version récursive

Écrivez un algorithme récursif traduisant la dichotomie.

B Méthode de Newton-Raphson

B 1 Historique

La méthode de résolution des équations numériques que nous allons voir aujourd'hui a été initiée par Isaac Newton vers 1669 sur des exmples numériques mais la formulation est fastidieuse. Dix ans plus tard, Joseph Raphson met en évidence une formule de récurrence. Un siècle plus tard, Mouraille et Lagrange étudient la convergence des approximations successives en fonction des conditions initiales par une approche géométrique. Cinquante ans plus tard, Fourier et Cauchy s'occupe de la rapidité de la convergence.

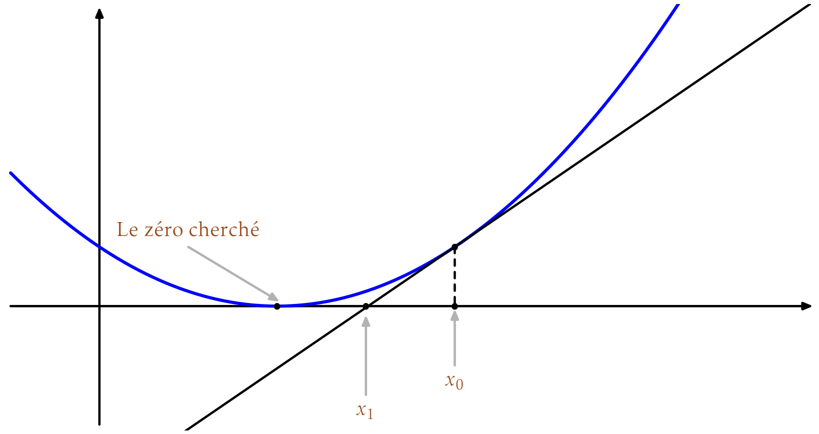
B 2 Principe

Newton présenta sa méthode en traitant l'équation $x^3-2x-5=0$.
Soit f la fonction $x \mapsto x^3-2x-5$. Tracez son graphe à l'aide de MAPLE.
Il coupe l'axe des abscisses pour une valeur comprise entre 2 et 3.
On assimile la courbe à sa tangente au point d'abscisse 2.
Celle-ci a pour équation $y=(x-2)\times f'(2)+f(2)=10(x-2)-1$
Posons $x=2+\varepsilon$ alors $f(2+\varepsilon)=0 \Longleftrightarrow \varepsilon^3+6\varepsilon^2+10\varepsilon-1=0$.
Si on assimile la courbe à sa tangente en 2, alors ε vérifie aussi $0=10(2+\varepsilon-2)-1$ c'est-à-dire $\varepsilon=0,1$.
En fait, assimiler la courbe à sa tangente, c'est négliger les termes en ε d'ordre supérieur à 1 (ici $\varepsilon^3+6\varepsilon^2$).
Un approximation de la solution est donc 2,1.
On recommence ensuite en partant de 2,1 au lieu de 2 puis on reprendra la nouvelle valeur trouvée comme valeur de départ, etc.

B 3 La formule de récurrence

On sent la procédure algorithmique poindre son nez. Pour finir de la mettre en évidence, nous allons formaliser la méthode précédente en introduisant la suite des approximation successives.

- On part d'un nombre quelconque x_0 ;
- à partir de x_0, on calcule un nouveau nombre x_1 de la manière suivante (voir figure) : on trace la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0, et on détermine le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. On appelle x_1 l'abscisse de ce point d'intersection ;
- et on recommence : on calcule un nouveau nombre x_2 en appliquant le procédé décrit au point 2 où l'on remplace x_0 par x_1 ;
- etc.



À partir de cette description graphique de la méthode de Newton, trouver la formule, notée (1), donnant x_1 en fonction de x_0, puis x_{n+1} en fonction de x_n. Quelles hypothèses doit-on faire sur f et les x_n pour que la formule ait un sens ?

Nous n'irons pas plus loin pour l'instant concernant la convergence de ces suites. Traitons l'exemple de Newton.

B 4 Étude de la suite associée à l'équation x^3-2x-5=0.

On veut résoudre l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$ par la méthode de Newton-Raphson appelée aussi méthode de la tangente. On note f la fonction $x \mapsto x^3 - 2x - 5$.

1. Montrez rapidement que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Montrez que $2 < \alpha < 3$.
2. Déterminez la fonction φ telle que $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, la suite (x_n) étant celle décrite au paragraphe précédent en prenant $x_0 = 3$.
3. Étudiez le sens de variation de la fonction φ puis celui de φ' et déduisez-en que $[\alpha, 3]$ est stable par φ et que φ est strictement croissante sur $[\alpha, 3]$.
4. Que pouvez-vous en déduire sur la convergence de la suite x_n ?

B 5 Test d'arrêt

Afin de construire un algorithme donnant une approximation d'une solution d'une équation numérique par la méthode de Newton-Raphson, il faudrait déterminer un test d'arrêt c'est-à-dire savoir à partir de quel rang n $|x_n - \alpha|$ restera inférieur à une valeur donnée.
Il suffit de remarquer que $f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha)$. Nous supposerons f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un « bon » voisinage I de α (ce critère nous échappe encore à notre niveau). Alors f est en particulier dérivable en α donc

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) \sim f'(\alpha) \times (x_n - \alpha)$$

C'est-à-dire, puisque $f'(\alpha)$ est supposé non nul :

$$x_n - \alpha \sim \frac{f(x_n)}{f'(\alpha)}$$

Or f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on a f' continue et non nulle en α donc $f'(\alpha) \sim f'(x_n)$. Finalement

$$x_n - \alpha \sim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1}$$

Nous choisirons donc comme test d'arrêt $\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < p$ avec p la précision choisie.
Il ne reste plus qu'à écrire l'algorithme.

B 6 Algorithme impératif

D'abord l'algorithme :

Entrées :
fonction f
précision p
premier terme $a0$
nombre maximum d'itération `// Pour éviter de « planter » MAPLE si on tombe sur un cas pathologique`

Initialisation : $fp \longleftarrow$ dérivée de f
compteur$\longleftarrow 0$ `// le compteur d'itérations`
$un \longleftarrow u0 - \frac{f(u0)}{fp(u0)}$
début
  tant que $\left|\frac{f(xn)}{fp(xn)}\right|$ *est plus grand que la précision p et que k* $<$ N **faire**
    si $fp(un) = 0$ **alors**
      On sort de la boucle avant de diviser par zéro et on explique pourquoi
    $un \longleftarrow un - \frac{f(un)}{fp(un)}$
    compteur$\longleftarrow$ compteur+1
fin
retourner *L'approximation et la valeur du compteur*

Algorithme 2 : Newton-Raphson

B 7 Procédure MAPLE

Ici encore il faudra faire attention à l'utilisation de `evalf`.
Comparez ensuite avec les résultats trouvés avec la dichotomie.

B 8 Version récursive

Écrivez un algorithme récursif traduisant la dichotomie.
Regardez également ce qui se passe avec l'équation $(x-1)^4 = 0$: quelle précaution supplémentaire faut-il prendre ? (La preuve nous échappe encore à notre niveau).

C Recherche d'une racine carrée

C 1 Héron et Newton

Héron d'Alexandrie n'avait pas attendu Newton et le calcul différentiel pour trouver une méthode permettant de déterminer une approximation de la racine carrée d'un nombre positif puisqu'il a vécu seize siècles avant Sir Isaac. Si x_n est une approximation strictement positive par défaut de $\sqrt{a}$, alors a/x_n est une approximation par excès de $\sqrt{a}$ (pourquoi ?) et vice-versa.

La moyenne arithmétique de ces deux approximations est $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ et constitue une meilleure approximation que les deux précédentes.

Montrez que cette méthode est un cas particulier de la méthode de Newton-Raphson appliquée à une équation particulière.

C 2 Influence de la première approximation

Notons ε_n l'erreur relative après n itérations par la méthode précédente.

Alors $\varepsilon_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ et donc $x_n = \frac{1+\varepsilon_n}{\sqrt{a}}$. Or $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.

Montrez qu'alors

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2(1+\varepsilon_n)}$$

Si on est trop loin de la solution au départ, ε_n n'est pas négligeable devant 1 et alors ε_{n+1} est de l'ordre de $\varepsilon_n/2$.

Sinon, ε_{n+1} est de l'ordre de $(\varepsilon_n)^2/2$.

Ainsi, si on est loin de la solution, la convergence est lente au départ (puisqu'elle est linéaire) puis elle devient d'ordre 2 (on dit qu'elle est quadratique).

C 3 Comment les calculatrices divisent-elles ?

Pour diviser b par a, les calculatrices commencent par calculer $1/a$ en appliquant la méthode de Newton. Comment font-elles ?

Montrez que l'erreur relative vérifie cette fois $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^2 = (1 - ax_n)^2$.

Y a-t-il des valeurs de x_0 qui font diverger la suite (x_n) ?

Observez avec MAPLE ce qui se passe pour $a = 10^{-10} = x_0$ et représentez l'erreur relative en fonction du rang n.

Références

BREZINSKI, Claude et REDIVO-ZAGLIA, Michela: Méthodes numériques itératives. Ellipses, 2006

CHABERT, Jean-Luc *et al.*: Histoire d'algorithmes. Belin, 1994

LE ROUX, Frédéric: Méthode de Newton., Comment calculer racine carrée de 2 quand on a oublié sa machine ⟨URL: http://matexo.smai.emath.fr/exemaalt/exos_individuels/pdf_imprimable/Methode-de-Newton.pdf⟩