CHAPITRE

6

Logistique dynamique

J'ai deux heures pour vous dire que MAPLE, c'est de la dynamique

1 Présentation du problème

Le mathématicien Belge Pierre-François VERHULST (28 octobre 1804 - 15 février 1849) proposa en 1838 un modèle d'évolution des populations animales qui porte son nom et qui rompt avec l'habituelle croissance exponentielle. On suppose qu'une population vaut p_n à un certain instant et qu'il existe une valeur d'équilibre e telle que la population tend à y revenir avec autant de force qu'elle s'en écarte. Il existe donc un coefficient positif k tel que :

$$\frac{p_{n+1}-p_n}{p_n} = -k(p_n - e)$$

Recherche

Déduisez-en qu'il existe une constante $\mathrm{R} \geqslant 1$ telle que :

$$p_{n+1} = \mathrm{R}p_n(1-\frac{k}{\mathrm{R}}p_n)$$

puis qu'il existe une valeur maximum de la population $p_{\max}$ et que :

$$u_{n+1} = \mathrm{R}u_n(1-u_n)$$

en notant u_n le rapport $\frac{p_n}{p_{\max}}$.

Depuis VERHULST on désigne par *suite logistique* ce type de suite. Il faut bien sûr considérer la plus ancienne des définition du mot :

> **LOGISTIQUE** n.f. **1.** (1611) Anc. nom de la partie de l'algèbre qui traite des quatre règles.

car nous n'utiliserons que les quatre opérations arithmétiques de base mais n'étudierons pas les problème de ravitaillement des armées.

Recherche

Dans quel intervalle varie R ?

Étudier la suite (u_n), c'est étudier le *système dynamique* défini par la fonction f. L'ensemble des x, $f(x)$, $f(f(x))$,...,$f^n(x)$,... est appelé l'*orbite* de x.

2 Exploration au petit bonheur

Peut-on se contenter d'observer le comportement d'une suite ? L'outil informatique permet-il de se passer d'une exploration théorique ?
Commençons donc par explorer au petit bonheur le comportement de ces suites à l'aide de Maple. Il faudrait tout d'abord nous construire un petit outil qui affiche les fameux escargots et autres escaliers à l'aide de la première bissectrice. Ce programme sera très utile pour l'oral de Centrale...

```
> escargot:=proc(R,uo,n)
  local u,fu,k,e,g,c;
  u:=uo;
  e:=NULL;
```

```
for k from 1 to n do
 fu:=R*u*(1-u);
 e:=e,[u,u],[u,fu];
 u:=fu;
od;
e:=plot([e],color=pink,title=cat(`R=`,convert(R,string), ` et uo=`,
    convert(uo,string)));
g:=plot(t,t=0..1,color=green);
c:=plot(R*t*(1-t),t=0..1,color=blue);
plots[display]({e,g,c});
end:
```

Recherche

Que fait escargot ?
Commentez alors les animations suivantes :

```
> A:=seq(escargot(0.01*R,0.2,50),R=100..400):
> plots[display](A,insequence=true);
> B:=seq(escargot(4,0.01*uo,50),uo=1..99):
> plots[display](B,insequence=true);
```

3 Convergence et points fixes

Vous connaissez parfaitement votre cours sur le rapport entre la convergence des suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et les points fixes de f.

Malheureusement, on ne parle pas assez du caractère attractif ou répulsif des points fixes.

À l'aide du théorème des accroissements finis, on peut montrer que, ℓ étant un point fixe de f :

- si $\left|f'(\ell)\right| < 1$, le point fixe est attractif et (u_n) converge vers ℓ avec $|u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$ pour un certain $k \in]0;1[$;
- si $f'(\ell) = 0$, le point est dit *super attractif* et la suite converge très rapidement ;
- si $\left|f'(\ell)\right| > 1$, le point fixe est répulsif et (u_n) ne converge que si elle est constante et égale à ℓ à partir d'un certain rang ;
- si $\left|f'(\ell)\right| = 1$, le cas est litigieux.

Recherche

Mais au fait, ces points fixes, quels sont-ils ?
Discuter selon les valeurs de R et commencer à expliquer grossièrement certains comportements observés. Étudier en particulier « l'attractivité » des points fixes.

4 Étude de la convergence dans le cas 1<R<3

4 1 Cas 1<R<=2

Recherche

Traiter le cas R = 2.
Que peut-on dire du point fixe non nul dans les autres cas ? Dans quel intervalle se trouve-t-il ?
Discuter alors selon la position de u_0 par rapport à ce point fixe et à $\frac{1}{\mathrm{R}}$

4 2 Cas 2<R<3

Les dessins obtenus avec Maple peuvent donner des idées.

Recherche

Montrer que $\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2}; \frac{\mathrm{R}}{4}\right]$ est stable par f.
En déduire que si $u_0 \in \mathrm{I}$, alors (u_{2n}) puis (u_n) converge vers le point fixe non nul.
Étudier ensuite le cas $u_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ puis le cas $u_0 \in \left]\frac{\mathrm{R}}{4}; 1\right[$ et montrer qu'on peut se ramener aux cas précédents.

5 Théorème de Coppel et conséquences

On note $f^n = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$.
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ une fonction continue. Soit $x \in \mathrm{I}$. Si x est un point fixe de f^n mais n'est pas un point fixe de f^k pour tout $0 < k < n$, on dit que x est ***n*-périodique**.
L'ensemble $\{x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\}$ est un ***n*-cycle** pour f.
Soit p_0, p_1,...,p_{n-1} un n-cycle On dit qu'il est **attractif** si $\left|(f^n)'(p_i)\right| < 1$ pour tout entier naturel i strictement inférieur à n. Dans ce cas, si u_0 est suffisamment proche de l'un des éléments du cycle, la suite admet les éléments du cycle comme valeurs d'adhérence.

Théorème 6 - 1

Théorème de Coppel
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Si f n'admet pas de 2-cycle, alors, pour tout $u_0 \in \mathrm{I}$, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge.

La démonstration est assez longue et nous ne nous en occuperons pas aujourd'hui.
Nous sommes pourtant en mesure de démontrer l'utile lemme suivant :

Lemme 6 - 1

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Si f admet deux points fixes répulsifs consécutifs distincts α et β avec α < β, alors il existe $p_2 \in]\alpha, \beta[$ tel que p_2 soit un point fixe de f^2.

Pour démontrer ce lemme, il suffit d'étudier la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f^2(x) - x$$

en précisant en particulier le signe de $g'(\alpha)$ et $g'(\beta)$.

Recherche

Démontrer le lemme.

5 1 Cas R=3

C'est un cas ambigu car dans ce cas $|f'(p)| = |2-3| = 1$.
Cependant, on peut utiliser le théorème de COPPEL pour montrer que la suite converge.

Recherche

Avec l'aide éventuelle du `solve` de Maple, démontrer la convergence de la suite (u_n) dans le cas $\mathrm{R} = 3$.

5 2 Cas R>3

C'est maintenant que ça devient amusant...

5 2 a Cycles d'ordre 2

Recherche

Les points fixes sont maintenant répulsifs : que peut-on en déduire ?
Utiliser éventuellement Maple pour déterminer les éventuels points fixes de f^2.
Que se passe-t-il lorsque R tend vers 3 par valeurs supérieures ?
Qu'illustre le script suivant :

```
> IR:=[seq(0.01*k,k=100..400)]:
> C:=seq(plot([f(t),f(f(t)),t],t=0..1,color=[red,blue,pink],title=
    cat('R=',convert(R,string))),R=IR):
> plots[display](C,insequence=true);
```

5 2 b Attractivité des cycles d'ordre 2

Soit p_2 un point fixe de f^2 autre que 0 et p. Il faudrait maintenant savoir quand est-ce que le 2-cycle $(p_2, f(p_2))$ est attractif.

Recherche

Montrer que $(f^2)'(p_2) = -p_2^2 + 2p_2 + 4$. Pour cela, montrer que $(f^2)'(p_2) = (f)'(p_2) \cdot f'(f(p_2))$ et utiliser le fait que p_2 et $f(p_2)$ sont des racines d'un polynôme du second degré introduit au paragraphe précédent.
Commenter alors les deux graphiques définis par :

```
> escargot(evalf(0.99+sqrt(6)),0.5,200);
> escargot(evalf(1.01+sqrt(6)),0.5,200);
```

5 2 c Cycles d'ordre 4

Le 2-cycle cesse d'être attractif pour $\mathrm{R} > 1+\sqrt{6}$. D'après le théorème de COPPEL, on en déduit que f^2 admet un 2-cycle, c'est-à-dire que f admet un 4-cycle : jusqu'à quelle valeur de R ?
C'est plus difficile à déterminer. On peut regarder graphiquement, par affinements successifs :

```
> IR:=[seq(0.0001*k,k=35440..35450)]:
> G:=seq(plot([(f@@4)(t)-t,(f@@8)(t)-t],t=0.52..0.526,numpoints=1000,
    color=[pink,purple],title=cat('R=',convert(R,string))),R=IR):
> plots[display](G,insequence=true,view
    =[0.52..0.526,-0.00001..0.00001]);
```

Recherche

Quel renseignement nous donne ce graphique ?

6 Théorème de Feigenbaum

6 1 Diagramme de Feigenbaum

```
> Feig:=proc(r1,r2,pas)
  local k,r,tmp,ligne,res,t,etendue;
  etendue:=floor((r2-r1)/pas)+1;
  res:=[0$etendue]:
  ligne:=[0$20]:
  tmp:=0.2:
  for r from r1 to r2 by pas do
    for k from 1 to 100 do
      tmp:=r*tmp*(1-tmp);
    od;
    for k from 1 to 20 do
      ligne:=subsop(k=[r,tmp],ligne);
      tmp:=r*tmp*(1-tmp);
    od:
    t:=floor((r-r1)/pas)+1;
    res:=subsop(t=ligne,res):
  od:
  plot(res,x=r1..r2,style=point,color=black);
  end:
```

Recherche

Interpréter le dessin obtenu.

6 2 Le théorème

On doit au physicien Mitchell FEIGENBAUM des conjectures qui furent prouvées par la suite par des mathématiciens, des vrais, mais c'est le nom du physicien qui reste attaché aux bifurcations. Voici un condensé des résultats proposé par Daniel PERRIN

Théorème 6 - 2

Soit R_n la borne inférieure des R tel que f admette un cycle d'ordre 2^n.

- on a $R_0 = 0$, $R_1 = 3$, $R_2 = 1+\sqrt{6}$, $R_3 \approx 0,544090$, $R_4 \approx 3,564407$;
- la suite (R_n) est strictement croissante, majorée par 4. Elle converge vers un réel $R_\infty \approx 3,5699456$;
- Pour $R_n < R < R_\infty$, f_R admet un unique 2^n-cycle qui est attractif tant que R est strictement inférieur à R_{n+1} ;
- pour $R < R_\infty$, f_R n'a pas de cycle d'ordre p si p n'est pas une puissance de 2.

Voici qui confirme nos intuitions.

7 Exposant de Lyapounov

Pour mesurer la sensibilité d'un système dynamique aux conditions initiales, on mesure l'exposant de LYAPOUNOV introduit par le mathématicien russe Alexandre LYAPOUNOV à la fin du XIXe siècle.

On considère une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Quelle est l'influence d'un écart e_0 sur u_0 pour la suite des itérés ?

Après une itération, l'écart absolu vérifie $|e_1| = |f(u_0+e_0) - f(u_0)|$ et l'écart relatif vaut $\frac{|e_1|}{|e_0|} = \frac{|f(u_0+e_0)-f(u_0)|}{|e_0|} \approx f'(u_0)$ pour $|e_0|$ suffisamment petit.
Après n itérations, l'écart relatif vaut

$$\frac{|e_n|}{|e_0|} = \frac{|e_1|}{|e_0|}\frac{|e_2|}{|e_1|}\cdots\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|} = \prod_{k=1}^{n} f'(u_{k-1})$$

Si un des écarts devient nul, notre étude est sans intérêt. Comme effectuer un produit est une opération coûteuse, informatiquement parlant, nous allons pouvoir considérer le logarithme de ce produit.

Notre problème est de savoir si les écarts s'amplifient et donc le produit est supérieur à 1, ou bien si le système est stable et donc le produit est inférieur à 1.

$$\prod_{k=1}^{n} f'(u_{k-1}) < 1 \iff \sum_{k=1}^{n} \ln\left(f'(u_{k-1})\right) < 0$$

Pour relativiser le rôle du choix de n, nous allons normer cette somme en la divisant par n.

On définit alors l'exposant de LYAPOUNOV :

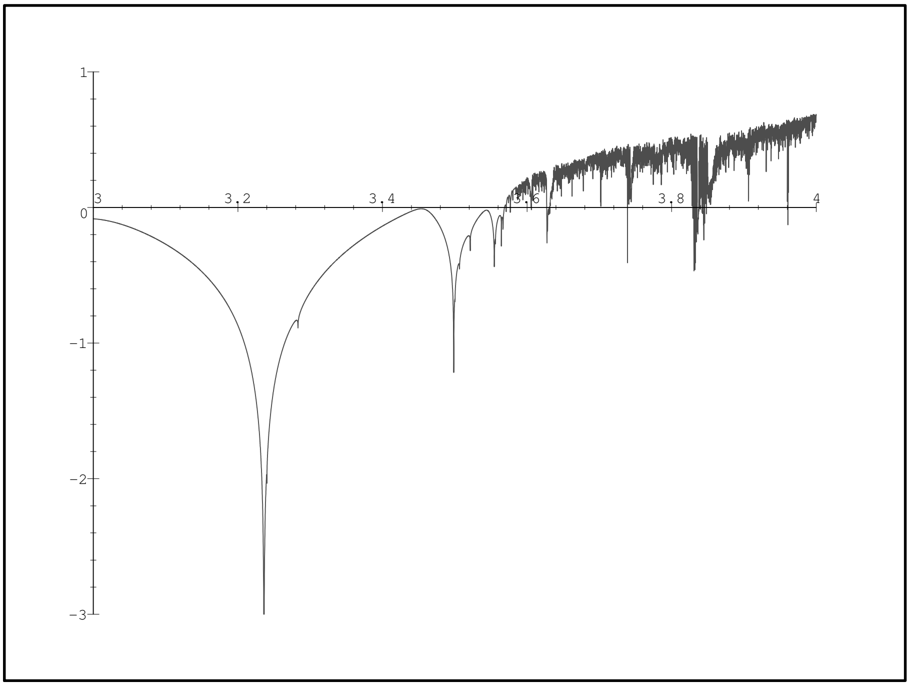
$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(f'(u_{k-1})\right)$$

Recherche

Écrire une procédure `lyapounov:=proc(u0,R,n)` qui calcule une approximation numérique de l'exposant de Lyapounov qui dépend de la donnée de u_0, R et le nombre n d'itérations.
Ensuite, l'utiliser pour représenter l'exposant en fonction de R.

Par exemple, avec $u_0 = 0,45$ et 50 itérations :

```
plot([seq([r*0.001,lyapounov(0.45,r*0.001,50)],r=3000..4000)],view
    =[-3..4,-3..1]);
```



Recherche Comment interpréter ce graphique ?

8 Prolongements

Pour savoir ce qui se passe au-delà de R_∞, étudiez ce merveilleux document :
http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/Conferences/logistiqueDP.pdf
écrit en 2008 par Daniel PERRIN de l'Université d'Orsay. Dans la note de première page, vous retrouverez le nom de deux professeurs bien connus...