TD MAPLE n°6 Tapis, arbres et brocolis

A Polygones de Sierpinski

Waclaw SIERPINSKI (1882 - 1969) fut un mathématicien polonais qui travailla sur des domaines mathématiques très ardus : fondements des mathématiques, construction axiomatique des ensembles, hypothèse du continu, topologie, théorie des nombres...
Il a également travaillé sur les premiers objets fractals qu'étudiera plus tard Benoît MANDELBROT, mathématicien français d'origine polonaise connu pour ses travaux dans ce domaine.

A 1 Jouons aux dés

Prenez un dé à 6 faces, un triangle ABC et un point G quelconque à l'intérieur du triangle.
Vous lancez le dé :

- si la face supérieure est 1 ou 2, vous faites une petite croix au niveau du milieu de G et de A ;
- si la face supérieure est 3 ou 4, vous faites une petite croix au niveau du milieu de G et de B ;
- si la face supérieure est 5 ou 6, vous faites une petite croix au niveau du milieu de G et de C ;

Ah, zut, on n'a pas de dé dans la salle d'info...mais on a Maple.

- `rand()` renvoie un entier aléatoirement choisi entre 0 et 999 999 999 999 ;
- `rand(n..p)` renvoie un entier aléatoirement choisi entre n et p inclus.

```
> dede:=proc(n)
  local P,r,t,d,G,L,k;
  P:=[[0,0],[1,0],[0.5,0.5*sqrt(3)]];
  r:=10.^(-12)*rand();
  t:=r();
  d:=rand(1..3);
  G:=t^2*P[1]+2*t*(1-t)*P[2]+(1-t)^2*P[3];

  ...

  end:
```

Expliquez le début de cette procédure, achevez-la et testez-la.

A 2 Étoiles et espaces

La commande `array(1..n,1..m)` construit un tableau de `n` lignes et `m` colonnes.
Que fait cette procédure :

```
> mystere:=proc(n)
  local T,j,i;
  T:=array(1..n,1..n);
  for j from 1 to n do
    for i from 1 to n do
      if j>i then T[i,j]:=``;
      fi;
    od;
  od;
  print(T);
  end:
```

Transformez-la un peu pour obtenir ceci avec $n = 10$ par exemple :

```
1
1    1
1    2    1
1    3    3    1
1    4    6    4    1
1    5    10   10   5    1
1    6    15   20   15   6    1
1    7    21   35   35   21   7    1
1    8    28   56   70   56   28   8    1
1    9    36   84   126  126  84   36   9    1
```

Complétez cette dernière procédure afin de remplacer chaque nombre pair par une espace ‘ ‘ et chaque nombre impair par une étoile ‘*‘. Lancez-la pour $n = 48$: incroyable, non ?

A 3 Tapis

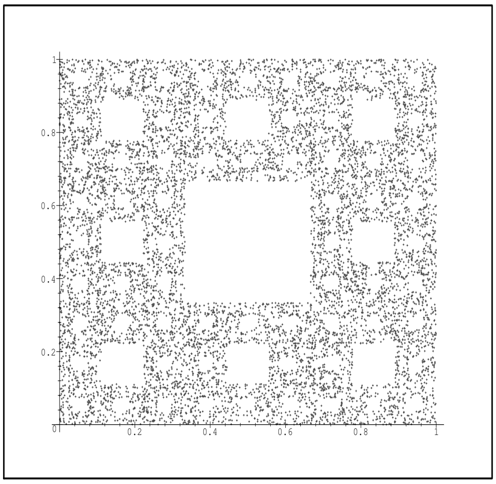
Considérons les huit transformations de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes :

$$T_1(z) = \frac{1}{3}z \qquad T_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} \qquad T_3(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \qquad T_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$$

$$T_5(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \qquad T_6(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \qquad T_7(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}i \qquad T_8(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}i$$

Soit E_0 le carré unité.
- Dessinez E_0 ;
- Dessinez $E_1 = T_1(E_0) \cup T_2(E_0) \cup \cdots \cup T_8(E_0)$;
- Identifiez les T_k.

Comment obtenir ce joli dessin avec MAPLE ?



Une possibilité est d'introduire une liste d'applications :

```
T:=[z->z/3,z->z/3+1/3,z->z/3+2/3,z->z/3+1/3+2*I/3,z->z/3+2/3+2*I/3,z->z/3+2/3+I/3,z->z/3+I/3,z->z
    /3+2*I/3];
```

A 4 Les mites de Sierpinski

Monsieur SIERPINSKI avait ramené d'un voyage en Orient un tapis carré de 1 mètre de côté dont il était très content. Jusqu'au jour où les mites s'introduisirent chez lui.

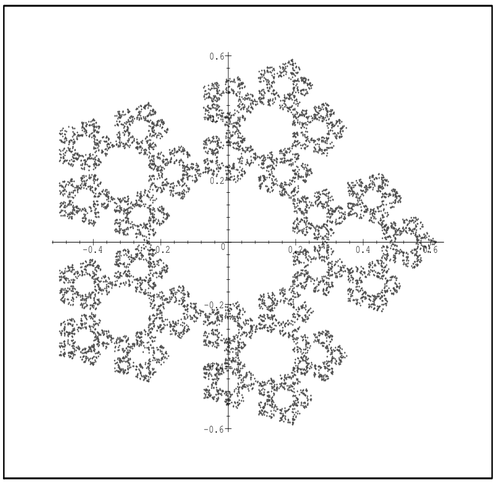
En 24 heures, elles dévorèrent dans le tapis un carré de côté trois fois plus petit, situé exactement au centre du tapis. En constatant les dégats, Monsieur SIERPINSKI entra dans une colère noire ! Puis il se consola en se disant qu'il lui restait huit petits carrés de tapis, chacun de la taille du carré disparu. Malheureusement, dans les 12 heures qui suivirent, les mites avaient attaqué les huit petits carrés restants : dans chacun, elles avaient mangé un carré central encore trois fois plus petit. Et dans les 6 heures suivantes elles grignotèrent encore le carré central de chacun des tout petits carrés restants. Et l'histoire se répéta, encore et encore ; à chaque étape, qui se déroulait dans un intervalle de temps deux fois plus petit que l'étape précédente, les mites faisaient des trous de taille trois fois plus petite...

- Calculer le nombre total de trous dans le tapis de Monsieur SIERPINSKI après n étapes. Calculer la surface S_n de tapis qui n'a pas encore été mangée après n étapes. Trouver la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$. Que reste-t-il du tapis à la fin de l'histoire ?
- Calculer la durée totale du festin « mitique »...

Merci à Frédéric Le Roux

A 5 Dentelle de Varsovie

Nous voudrions obtenir le joli napperon en dentelle suivant :



Déterminez le rapport des similitudes qui transforment le grand pentagone en un des pentagones plus petit.
En vous inspirant de ce qui a été fait pour le triangle de SIERPINSKI, faites tracer à MAPLE ce joli napperon.

En fait on peut montrer que pour un nombre $c \geqslant 5$ de côtés, le rapport est de $\dfrac{1}{2\sum_{k=0}^{[\frac{c}{4}]}\cos\left(\frac{2k\pi}{c}\right)}$

B Végétation récursive

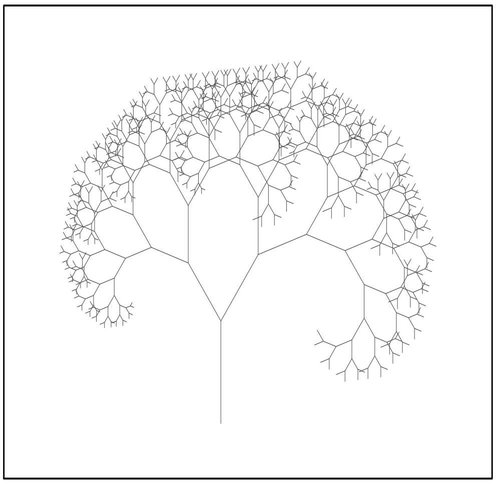
Analysez cet algorithme :

```
arbre:=proc(A,B,Rap,Ang,n)
   if n>0
     then [[Re(A),Im(A)],[Re(B),Im(B)]],seq(arbre(B,B+Rap[q]*exp(Ang[q]*I)*(B-A),Rap,Ang,n-1),q
         =1..nops(Rap))
     else [[Re(A),Im(A)],[Re(B),Im(B)]]
   fi
end:
```

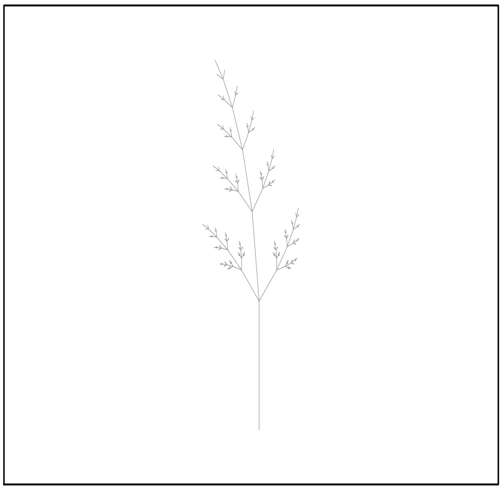
sachant que

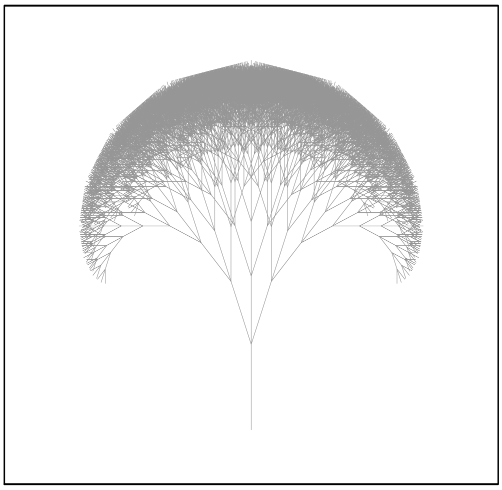
```
plot([arbre(0,I,[0.7,0.8],[Pi/5,-Pi/5],9)],axes=none,scaling=constrained,color=green);
```

donne

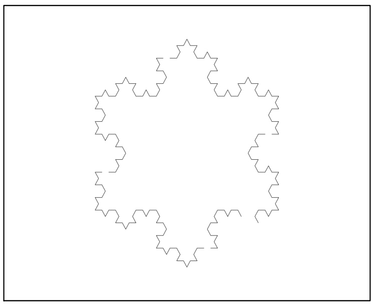


Comment obtenir cette fougère et ce brocolis ?





Ce n'est plus un arbre mais un beau flocon (le flocon de VON KOCH) : comment le générer avec MAPLE ?



C Ensembles de Julia et de Mandelbrot

Gaston JULIA (1893 - 1978) est un mathématicien français qui a travaillé en particulier sur les fonctions à variable complexe. Ses travaux ont été largement utilisé par Benoît MANDELBROT (né en 1924) au début des années 1970. Nous allons survoler certains de leurs résultats les plus populaires.
Nous allons étudier les suites (z_n) définies par z_0 et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ pour tout entier naturel n avec c un nombre complexe quelconque.
Nous avons déjà exploré une suite réelle semblable lors de notre incursion dans la dynamique des populations.

Le cas $c = 0$ est assez simple à étudier : faites-le !
Comment ce que vous avez obtenu est en lien avec cette procédure MAPLE et son utilisation ?

```
> julia:=proc(x,y)
    global c;
    local z,j;
    z:=evalf(x+I*y);
     for j from 0 to 50 while abs(z)<4 do
       z:=z^2+c
     od;
    j
  end:

> c:=0:

> plot3d(0,-2..2,-1.2..1.2,orientation=[-90,0],grid=[150,150],style=patchnogrid,scaling=
    constrained,color=julia);
```

Je vous dois une petite explication au sujet de la dernière instruction. Afin de gagner du temps, on utilise une petite ruse pour pallier aux carences de MAPLE en géométrie.
On utilise `plot3d` avec la fonction $f : (x, y) \mapsto 0$ afin de tracer le plan d'équation $z = 0$. Ses points sont colorés selon la procédure `julia`. L'option `grid` indique la taille de la grille tracée. On précise également qu'on veut un repère orthonormé, pas de maillage apparent et on place les axes de coordonnées dans l'orientation usuelle.
Testez différentes valeurs de c : -1, $0,32 + 0,043\mathrm{i}$, $-0,122561 + 0,744862\mathrm{i}$.
Quelles sont vos interprétations ?
Plutôt que de testez les valeurs de c une par une, Benoît MANDELBROT a cherché à représenter les valeurs de c qui faisaient converger la suite avec $z_0 = 0$: c'est l'ensemble de MANDELBROT.
Tracez-le !