TAYLOR et les approximations polynomiales

A - Conventions

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
Nous dirons qu'une fonction est deux fois dérivable sur I si sa dérivée est elle-même dérivable sur I.
Nous noterons $f^{(1)}$ la dérivée d'une fonction f dérivable sur I, $f^{(2)}$ la dérivée de $f^{(1)}$ et plus généralement $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$.
Par convention, $f^{(0)}$ désignera f.
Nous dirons qu'une fonction est n fois dérivable sur I si sa dérivée $n-1$-eme est elle-même dérivable sur I.

Soit n un entier naturel. On désigne par $n!$ le nombre :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

Par exemple, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
Par convention, $0! = 1$.

Soit f une fonction n fois dérivable sur I. Soit a un élément de I. Pour tout réel x, on définira le *polynôme de* TAYLOR *en a à l'ordre n* par la relation :

$$\mathrm{T}_{n,a}(f)(x) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

B - Cas de l'ordre 1

Soit f une fonction dérivable sur I.
Simplifiez l'écriture de $\mathrm{T}_{1,a}(f)(x)$. Ça vous dit quelque chose ?
Sur un même graphique, donnez l'allure des courbes représentatives de f et de $\mathrm{T}_{1,-\frac{1}{2}}(f)$ avec $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2$ en vous aidant de la calculatrice ou d'un ordinateur.

C - Cas des fonctions polynomiales

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = 7x^4 - 3x^2 + 5x - 12$.
Calculez P(2).
Donnez le développement de TAYLOR en 2 à l'ordre 3 de P puis à l'ordre 57.

D - Cas des fonctions homographiques

Une fonction homographique est une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d des réels.
Notons g la fonction homographique correspondant au cas $a = 0$, $b = d = 1$ et $c = -1$.
Quel est l'ensemble de définition de g ?
Calculez $g^{(1)}(x)$, $g^{(2)}(x)$, $g^{(3)}(x)$ et plus généralement $g^{(n)}(x)$.
Écrivez le plus simplement possible $\mathrm{T}_{5,0}(g)(x)$.
Sur un même graphique, donnez l'allure des courbes représentatives de g et de $\mathrm{T}_{5,0}(g)$ en vous aidant de la calculatrice ou d'un ordinateur.

Soit $h(x) = \dfrac{5-3x}{1-x}$. Montrez qu'il existe deux réels α et β tels que $h(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{1-x}$.
Déduisez-en $\mathrm{T}_{5,0}(h)(x)$ pour x appartenant à un bon intervalle.

E - Cas des fonctions trigonométriques

Soit $f(x) = \sin(x)$.
Calculez $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ et plus généralement $f^{(n)}(x)$.
Écrivez le plus simplement possible $\mathrm{T}_{5,0}(f)(x)$.
Sur un même graphique, donnez l'allure des courbes représentatives de f et de $\mathrm{T}_{5,0}(f)$ en vous aidant de la calculatrice ou d'un ordinateur.

Faites de même avec $g(x) = \cos(x)$.

On pose $h(x) = \tan(x)$. Déterminez $\mathrm{T}_{4,0}(h)(x)$.

F - Cas des fonctions irrationnelles

On pose $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$
Répondez aux questions habituelles.

G - Approximation locale ou globale ?

En utilisant les termes « global » et « local », comment classeriez-vous les fonctions étudiées précédemment et leurs approximations polynomiales ?