1. a) Puisque $a \equiv b[7]$ et $c \equiv d[7]$, il existe deux entiers k et ℓ vérifiant

$$\left.\begin{array}{r} a = b+7k \\ c = d+7\ell \end{array}\right\} \Longrightarrow ac = bd + 7(b\ell + dk)$$

ce qui traduit que $ac \equiv bd[7]$.

b) On considère deux entiers a et b vérifiant $a \equiv b[7]$.
Soit n un entier naturel et $\mathrm{P}(n)$ la propriété « $a^{\mathrm{n}} \equiv b^{\mathrm{n}}[n]$ »
Comme $1 \equiv 1[7]$, $\mathrm{P}(0)$ est vraie.
On peut donc supposer qu'il existe un entier k tel que $\mathrm{P}(k)$ soit vraie.
On a donc $a^{\mathrm{k}} \equiv b^{\mathrm{k}}[7]$ et $a \equiv b[7]$. On en déduit, d'après la propriété démontrée au 1a que

$$a^{\mathrm{k}+1} \equiv b^{\mathrm{k}+1}[7]$$

ce qui traduit que $\mathrm{P}(k)$ vraie $\Longrightarrow \mathrm{P}(k+1)$ vraie.
Nous avons donc démontré par récurrence que $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. $2^3 = 8 \equiv 1[7]$ et $3^6 = 729 \equiv 1[7]$.

3. a) Comme a n'est pas divisible par 7, il est congru à 1,2,3,4,5 ou 6 modulo 7.
Or on vérifie que $k^6 \equiv 1[7]$ pour tout $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$, ce qui assure le résultat.

b) Effectuons la division de 6 par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^{\mathrm{k}} \equiv 1[7]$.
Il existe un unique couple d'entiers (q, r) tels que $6 = qk + r$, avec $0 \leqslant r < k$.
Alors $a^6 = \left(a^{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{q}} \cdot a^{\mathrm{r}}$. Or $a^{\mathrm{k}} \equiv 1[7]$, donc $\left(a^{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{q}} \cdot a^{\mathrm{r}} \equiv a^{\mathrm{r}}[7]$.
Mais $a^6 \equiv 1[7]$, donc finalement $a^{\mathrm{r}} \equiv 1[7]$.
Puisque k est le plus petit entier naturel non nul tel que $a^{\mathrm{k}} \equiv 1[7]$ et que $0 \leqslant r < k$, on obtient que r est nul et donc que *k divise 6*.
Les valeurs possibles de k sont alors 1, 2, 3 et 6.

c) Nous avons déjà obtenu que 2 est d'ordre 3 et 3 est d'ordre 6.
On vérifie aisément que 4 n'est pas d'ordre 1, puis que $4^2 = 16$, donc 4 n'est pas d'ordre 2 et $4^3 = 2^6 \equiv 1[7]$, donc 4 est d'ordre 3.
On vérifie que 5 n'est ni d'ordre 1, ni d'ordre 2, ni d'ordre 3 : il est donc d'ordre 6.
Enfin $6^2 = 36 = 5 \times 7 + 1$, donc 6 est d'ordre 2.

4. On obtient successivement
   - ⊳ $2^{2006} = \left(2^3\right)^{668} \times 2^2 \equiv 4[7]$
   - ⊳ $3^{2006} = \left(3^6\right)^{334} \times 3^2 \equiv 2[7]$
   - ⊳ $4^{2006} = \left(4^3\right)^{668} \times 4^2 \equiv 2[7]$
   - ⊳ $5^{2006} = \left(5^6\right)^{334} \times 5^2 \equiv 4[7]$
   - ⊳ $6^{2006} = \left(6^2\right)^{1003} \equiv 1[7]$

   Finalement

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{2006} &\equiv 4+2+2+4+1[7] \\ &\equiv 6[7] \end{aligned}$$