Exercices TS4 : nombres complexes I

Exercice 1 Lignes trigonométriques de $\pi/12$

Écrivez sous forme trigonométrique $z = \dfrac{\sqrt{6}-j\sqrt{2}}{2(1-j)}$ puis sous forme algébrique et déduisez-en $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 2 Équations du second degré

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a)\ z^2+1=0 \qquad b)\ z^2+z+1=0 \qquad c)\ z^2-j\sqrt{2}z-j\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$d)\ z^2+5(1-j)z-4(3+4j)=0 \qquad e)\ z^4+(1-2j)z^2-2j=0$$

$$f)\ (z-1)^6+(z-1)^3+1=0$$

Exercice 3 Équation dans $\mathbb{C}$

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation

$$\frac{z+1}{z-1}=1+i.$$

Exercice 4 Système d'équations dans $\mathbb{C}$

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que

$$\begin{cases} 2z_1+z_2=4 \\ -2iz_1+z_2=0 \end{cases}$$

Exercice 5 Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

On donne le nombre complexe

$$\underline{\alpha}=\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\mathrm{R})+\underline{Z}_2\mathrm{R}},$$

avec $\mathrm{R}=900$, $\underline{Z}_1=1\,100j$, $\underline{Z}_2=-600j$.
Mettre le nombre complexe $\underline{\alpha}$ sous la forme algébrique $a+bj$.

Exercice 6 Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
L'impédance complexe d'un circuit est telle que

$$\underline{Z}=\frac{\underline{Z}_1\times\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3},$$

avec $\underline{Z}_1=1+2j$, $\underline{Z}_2=-1+3j$ et $\underline{Z}_3=4+5j$.
Mettre $\underline{Z}$ sous la forme algébrique $a+bj$.

Exercice 7 Écriture sous forme trigonométrique

Déterminer les formes trigonométriques des nombres

$$z_1=3j,\qquad z_2=-5,\qquad z_3=2-2j\qquad z_4=1+j\sqrt{3}$$

Exercice 8 Module et argument d'une puissance

On considère les nombres complexes :

$$z_1=\sqrt{3}-j,\qquad z_2=2-2j,\qquad \mathrm{A}=\frac{z_1^4}{z_2^3}$$

(où i désigne lme nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2, z_1^4, z_2^3 et A.

2. En déduire la forme algébrique des nombres complexes z_1^4, z_2^3 et A.

3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

4. Vérifier les résultats obtenus avec votre calculatrice.

Exercice 9 Racine carrée dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 = 3 - 4j$$

Exercice 10 Équation à coefficients dans $\mathbb{R}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0.$$
2. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

Exercice 11 Équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

1. Calculer $(3-2j)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 + z - 1 + 3j = 0.$$
2. Calculer $(5-3i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 + (5-i)z + 2 + 5i = 0.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - (5+3i)z + 10 + 5i = 0.$$

Exercice 12 Ligne de niveau

1. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant $|z-3| = 2$?
2. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant $\arg(z-(3-i)) = \pi/3$?
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que
$$z = 1 - j\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}\omega}$$
où L et C sont deux contantes réelles strictement positives et où ω est un réel variant dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

Exercice 13 Fonction de transfert en électronique

En électronique, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{\mathrm{T}}$ de la pulsation ω, définie quand ω décrit l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\underline{\mathrm{T}}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}.$$

1. Montrer que pour tout nombre réel ω de $[0,+\infty[$, on a :
$$\underline{\mathrm{T}}(\omega) = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}.$$
2. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$, unité 20 cm (ou 20 grands carreaux). Placer les points A, B, C, D, E et F d'affixes respectives
$$\underline{\mathrm{T}}(0),\quad \underline{\mathrm{T}}(0{,}3),\quad \underline{\mathrm{T}}(0{,}5),\quad \underline{\mathrm{T}}(1),\quad \underline{\mathrm{T}}(2),\quad \underline{\mathrm{T}}(3).$$
3. Montrer que, pour tout nombre réel ω de $[0,+\infty[$, le point M d'affixe $\underline{\mathrm{T}}(\omega)$ est situé sur le demi-cercle inférieur de diamètre [OA].
4. Quel est l'ensemble des points m d'affixe $1-j\omega$ quand ω varie dans $[0,+\infty[$?

Exercice 14 Fonction de transfert en électronique bis

En électronique, sur un montage, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{\mathrm{T}}$ de la pulsation ω, définie quand ω décrit l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\underline{\mathrm{T}}(\omega) = \frac{4}{(1+j\omega)^3}.$$

1. Calculer
$$\underline{\mathrm{T}}(0),\quad \underline{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \underline{\mathrm{T}}(1),\quad \underline{\mathrm{T}}(\sqrt{3}).$$
2. On modifie le montage précédent et on obtient alors la « nouvelle fonction de transfert » $\underline{\mathrm{H}}$ définie par :
$$\underline{\mathrm{H}}(\omega) = \frac{\underline{\mathrm{T}}(\omega)}{1+\underline{\mathrm{T}}(\omega)}$$
Calculer les modules et argument de $\underline{\mathrm{H}}(0)$, $\underline{\mathrm{H}}(1)$ et $\underline{\mathrm{H}}(\sqrt{3})$.
3. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit A le point d'affixe -1 et M le point d'affixe $\underline{\mathrm{T}}(\omega)$.
4. Montrer que le module de $\underline{\mathrm{H}}(\omega)$ est égal à MO/MA.
5. Montrer qu'un argument de $\underline{\mathrm{H}}(\omega)$ est égal à l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MO}}}\right)$.
6. Utiliser les questions **4.** et **5.** pour retrouver les résultats du **2.**

Exercice 15 ROC (Amérique du Sud, novembre 2006)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et arg $(z) = (\vec{u},\ \vec{w})$ ».
Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

1. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{\text{MN}}, \overrightarrow{\text{MP}}\right)$.

2. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

Exercice 16 ROC. (Centres étrangers, juin 2007)

1. Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Exercice 17 ROC (Amérique du Nord, juin 2006)

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

Exercice 18 ROC (Métropole 15 juin 2006)

On prend comme pré-requis les résultats suivants :

– Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

– Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

1. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
2. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

Exercice 19 ROC (Asie juin 2006)

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Exercice 20 ROC (Centres étrangers, juin 2006)

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r & > & 0 \end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \sin b\cos a \end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Exercices « originaux »

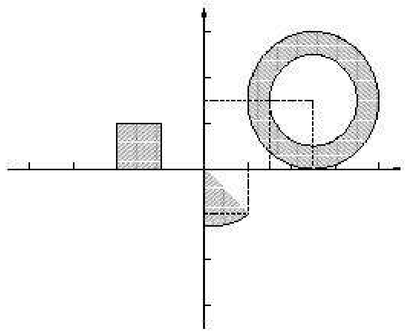
Exercice 21 Problème ouvert : calcul de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$

En utilisant les racines carrées de $1+i$, trouver une méthode pour obtenir une formule donnant $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Trouvez au moins deux autres méthodes de calcul en utilisant des formules trigonométriques.

Exercice 22 Du dessin aux formules

Caractérisez les nombres complexes z appartenant aux ensembles suivants :

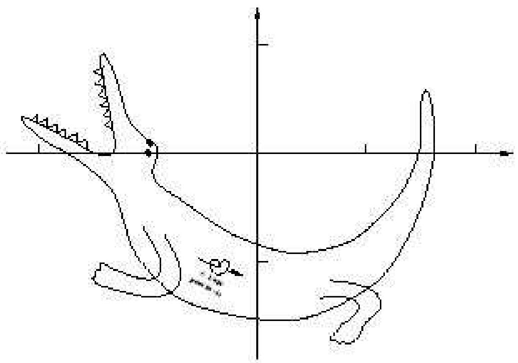


Exercice 23 Le crocodile se mord la queue...

...ou comment visualiser une multiplication complexe sur une pauvre bête ?

On voudrait comprendre « quel effet cela fait à un nombre complexe de se faire élever au carré ». Pour ça, on cherche à dessiner l'image du crocodile par l'application φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$



1. Écrivez les parties réelles et imaginaires de z^2 en fonction de celles de z, puis le module et l'argument de z^2 en fonction de ceux de z. Commentaire ?
2. Dessinez une demi-droite issue de 0 et son image par φ.
3. Quelle est l'image d'un cercle centré en 0 ? Placez aussi les images de quelques points particuliers du cercle.
4. « Dessinez l'image du crocodile ».
5. (plus facile) Dessinez de même l'image du croco par $z \mapsto z+1+2i$, $z \mapsto (\sqrt{3}+i)z$.

Exercice 24 Les fractales

Les fractales sont des objets irréguliers dont l'étude a débuté il y a une trentaine d'années. Elles interviennent dans de nombreux domaines : modélisation des matériaux poreux et des semi-conducteurs, description mathématique de la surface d'un nuage, étude des mécanismes financiers, infographie, c'est à dire création d'algorithmes efficaces pour représenter des objets sur un écran d'ordinateur (avec un minimum de données transmises).
Nous allons étudier deux fractales simples : le tamis et le tapis de Sierpinski.

Exercice 25 Dessin du tamis de Sierpinski

Considérons les trois transformations de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes :

$$T_1(z) = \frac{1}{2}z \qquad T_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \qquad T_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

Soit E_0 le triangle de sommets d'affixes 0, 1 et $1/2+i$.

1. Dessiner E_0.
2. Dessiner $E_1 = T_1(E_0) \cup T_2(E_0) \cup T_3(E_0)$
3. Dessiner $E_2 = T_1(E_1) \cup T_2(E_1) \cup T_3(E_1)$

$\vdots$

Si nous voulons transmettre ces dessins informatiquement, il est impossible de donner les coordonnées des sommets de tous les triangles noircis du tamis puisqu'il y en a une infinité. En fait, il suffit de donner E_0, T_1, T_2 et T_3 et le tour est joué. C'est ce qui est utilisé sur internet.
Un autre problème : quelle est la resistance électrique du tapis ?

Exercice 26 Dessin du tapis de Sierpinski

E_0 est le carré unité.

$$T_1(z) = \frac{1}{3}z \qquad T_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} \qquad T_3(z) = \frac{1}{3}z + \mathrm{d}t \qquad T_4(z) = \frac{1}{3}z + \mathrm{d}t + \frac{1}{3}i$$

$$T_5(z) = \frac{1}{3}z + \mathrm{d}t + \mathrm{d}t\,i \qquad T_6(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \mathrm{d}t\,i \qquad T_7(z) = \frac{1}{3}z + \mathrm{d}t\,i \qquad T_8(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}i$$

Géométrie, complexes, fonctions, électronique : qui dit mieux ?

Exercice 27 Inversion complexe

On considère l'application f du plan complexe dans $\mathbb{C}$ qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M′ d'affixe $1/z$. On pose $z = x + iy$ la forme algébrique de z et $x' + iy'$ celle de l'affixe z' de M′.

1. Exprimez x' et y' en fonction de x et y.
2. Quelle est l'image de M′ par f ? Déduisez-en l'expression de x et y en fonction de x' et y'.
3. Soit D une droite d'équation $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminez une équation de l'image de D par f. Déduisez-en la nature de cette image.
4. Cas particulier : déterminez l'image de la droite Δ d'équation $x = 32$.

Exercice 28 Un peu d'électronique : étude d'un filtre

On bidouille un filtre en mettant deux résistances R et deux condensateurs de capacité C de manière rusée. Quand on applique à l'entrée une certaine tension de pulsation ω, on recueille à la sortie un nouveau signal « filtré » mais de même pulsation. Ce filtre est caractérisé par la fonction de transfert T définie par

$$\mathrm{T}(\omega) = \frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{Z}_1(\omega)}{\mathrm{Z}_2(\omega)}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Z}_1(\omega) = \mathrm{R} + \frac{1}{j\mathrm{C}\omega} \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}_2(\omega) = \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{R}} + j\mathrm{C}\omega}$$

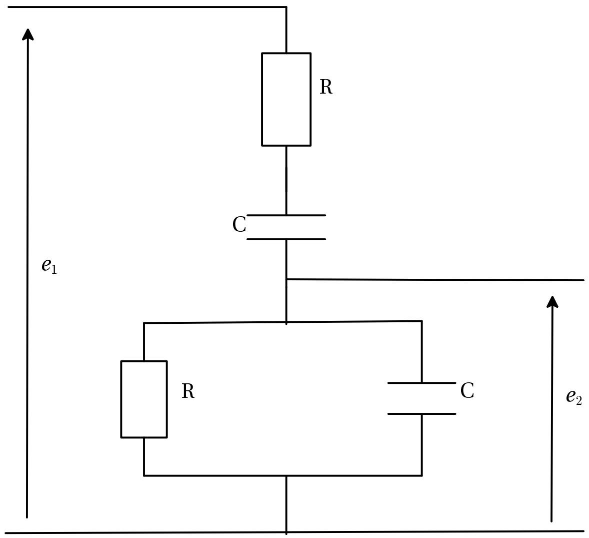


FIGURE 1 – Filtre

Justifiez les valeurs trouvées de Z_1 et Z_2
Les constantes R et C sont bien sûr strictement positives. En électronique, on note j le nombre vérifiant $\mathrm{j}^2 = -1$ pour ne pas faire de confusion avec l'intensité i.

1. Montrez que $\mathrm{T}(\omega) = \dfrac{1}{3 + j\left(\mathrm{R}\mathrm{C}\omega - \dfrac{1}{\mathrm{R}\mathrm{C}\omega}\right)}$

2. a) On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h(\omega) = \mathrm{R}\mathrm{C}\omega - \frac{1}{\mathrm{R}\mathrm{C}\omega}$$

Dressez le tableau de variation de h sur $]0, +\infty[$.

b) On considère le point m d'affixe $3 + jh(\omega)$. Quel est l'ensemble (D) décrit par le point m lorsque ω parcourt $]0, +\infty[$?

c) Quelle transformation associe au point m le point M d'affixe $\mathrm{Z} = \mathrm{T}(\omega)$?

d) Déduisez-en l'ensemble (E) décrit par le point M quand ω parcourt $]0, +\infty[$.

e) Tracez sur un même graphique les ensembles (D) et (E). Vous prendrez pour unité 6cm.
Vous représenterez également le point m_0 d'affixe $3 + \mathrm{j}$ et son image M_0 par la transformation envisagée.

Des exercices de Bac

Exercice 29 Équations - systèmes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\dfrac{z+2}{z+2i} = i$

b) $2z + i\overline{z} = 5 - i$

2. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} 2iz + z' & = 2i \\ 3z - iz' & = 1 \end{cases}$

Exercice 30 Équations coeff complexes

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$

2. Soit l'équation (F) d'inconnue complexe z :

$$(\mathrm{F}) : z^2 - 2z + 4 + 4i = 0$$

3. Montrer que (F) admet pour solution un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.

4. Résoudre l'équation (F).

Exercice 31 Équation de degré 4 - Interprétation géo.

On considère le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\mathrm{P}(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

3. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m=-2+4i$, $n=-2-4i$, $p=2+3i$ et $q=2-3i$.

4. a) Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z-p}{z-m}=i$. Placer son image K.

   b) En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.

5. a) Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.

   b) Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.

   c) Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Exercice 32 Style Bac

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
On note A et B les points d'affixes respectives 2i et −1.
À tout nombre complexe z, distinct de 2i, on associe le nombre complexe $Z=\dfrac{z+1}{z-2i}$.

1. Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z dans le cas où $z\neq -1$.
2. Déterminer et représenter graphiquement, en utilisant la question précédente, les ensembles de points suivants

   a) L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel négatif.

   b) L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.

Exercice 33 Le QCM de la mort

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Vous avez 1 point par bonne réponse. J'enlève 0,5 point par réponse inexacte.

1. Soit $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z}+|z|=6+2i$. La forme algébrique de z est

   ○ $\dfrac{8}{3}-2i$ ○ $-\dfrac{8}{3}-2i$ ○ $\dfrac{8}{3}+2i$ ○ $-\dfrac{8}{3}+2i$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $|z-1|=|z+i|$ est la droite d'équation :

   ○ $y=x-1$ ○ $y=-x$ ○ $y=-x+1$ ○ $y=x$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Le nombre $(1+i\sqrt{3})^n$ est réel si, et seulement si

   ○ $n\equiv 1[3]$ ○ $n\equiv 2[3]$ ○ $n\equiv 0[3]$ ○ $n\equiv 0[6]$

4. Soit l'équation $z=\dfrac{6-z}{3-z}$, $z\in\mathbb{C}$. Une de ses solutions est

   ○ $-2-\sqrt{2}i$ ○ $2+\sqrt{2}i$ ○ $1-i$ ○ $-1-i$

5. Soit A et B d'affixes respectives $z_A=i$ et $z_B=\sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. L'affixe z_C du point de C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\pi/3$ est

   ○ $-i$ ○ $2i$ ○ $\sqrt{3}+i$ ○ $\sqrt{3}+2i$

6. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant la relation $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2i}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est

   ○ une droite ○ un cercle ○ une lemniscate de Bernoulli ○ une bergère syldave

Exercice 34 Bac

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthononnal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
Dans tout l'exercice, $\mathscr{P}\setminus\{O\}$ désigne le plan $\mathscr{P}$ privé du point origine O.

1. On considère l'application f de $\mathscr{P}\setminus\{O\}$ dans $\mathscr{P}\setminus\{O\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par : $z'=\dfrac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

   a) Démontrer que pour $z\neq 0$, on a $\arg(z')=\arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
   En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{P}\setminus\{O\}$ les points M et M′ $=f(\text{M})$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

   b) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}\setminus\{O\}$ tels que
   $f(\text{M})=\text{M}$.

   c) M est un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M′ est aussi distinct de O, U et V.
   Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-i}=\dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right)=-i\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)}$.
   En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)$

2. a) Soit z un nombre complexe tel que $z\neq 1$ et $z\neq i$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul.

   b) Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

Exercice 35 VRAI ou FAUX

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.
On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}$, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = \text{i}$ ou $z = -\text{i}$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Exercice 36 Une impression de Déjà-Vu

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ à 2π près.
On note A et B les points d'affixes respectives $-\text{i}$ et 3i.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M$'$ d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\text{i}z + 3}{z + \text{i}}$$

1. étude de quelques cas particuliers.
   a) Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre [AB].
   Placer ces points sur le dessin.
   b) On note C le point d'affixe $c = -2 + \text{i}$. Démontrer que le point C$'$, image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.
2. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que
   $\arg(z') = \left(\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MB}}\right) + \frac{\pi}{2}$ à 2π près.
3. Étude de deux ensembles de points.
   a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.
   b) Soit M d'affixe z un point du cercie de diamètre [AB] privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M$'$?

Exercice 37 Géométrie complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M$'$ d'affixe z' telle que $z' = \frac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.
3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.
4. a) Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{OM}'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.
   b) Exprimer $\left|z'\right|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.
   c) Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que OP = 3, et construire géométriquement son image P$'$ par f.
5. On considère le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de $\mathscr{C}_1$,distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

Exercice 38 QCM

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse inexacte enlève 0,5 point; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre A$(-2\,;\,5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :
   a) $|z - 2 + 5\text{i}|^2 = 3$;
   b) $|z + 2 - 5\text{i}|^2 = 3$;
   c) $|z - 2 + 5\text{i}| = 3$.
2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.
   a) M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
   b) M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB] ;

c) M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$ et $5+4\mathrm{i}$, et C un point du cercle de diamètre [AB]. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

a) $|z_G - 3 - 2{,}5\mathrm{i}| = \dfrac{5}{6}$;

b) $z_G - (1+\mathrm{i}) = \dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$;

c) $z_G - (3+2{,}5\mathrm{i}) = \dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$.

Exercice 39 QCM : on aime !

Pour chacune des trois questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}$ et $2{,}08+1{,}98\mathrm{i}$. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle **(b)** : rectangle et non isocèle

(c) : rectangle et isocèle **(d)** : ni rectangle ni isocèle

2. à tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\mathrm{i}}{z+2}$.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

(a) : un cercle de rayon 1 **(b)** : une droite

(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a) : un cercle **(b)** : une droite

(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

Exercice 40 Bac

I. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3+\mathrm{i}$, $b = -1+3\mathrm{i}$, $c = -\sqrt{5} - \mathrm{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Placer les points A, B, C et le point H d'aflixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

II. Étude du cas général.

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :

$$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$

1. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

a) En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.

b) Verifier l'égalité : $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

c) En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

2. Soit H le point d'affixe $a+b+c$.

a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

b) Prouver que $\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{AH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.

(On admet de même que $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{BH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Exercice 41 Une petite équation

On considère l'équation :

$$\text{(E)} \quad z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (13+4\mathrm{i})z - 13\mathrm{i} = 0$$

où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (13+4\mathrm{i})z - 13\mathrm{i} = (z-\mathrm{i})\left(az^2+bz+c\right).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).