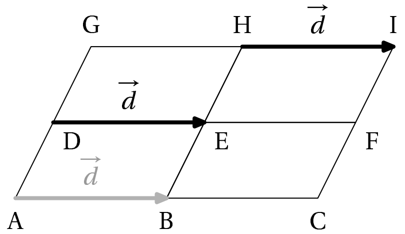
Chapitre IV

Vecteurs et repères du Plan

I - Qu'est-ce qu'un vecteur du plan ?

Nous ne pouvons pas, à notre niveau, donner une définition rigoureuse d'un vecteur du plan. Disons que concrètement, un vecteur est un *déplacement* :



Le *déplacement* de A vers B est le même que celui de D vers E ou de H vers I. On appelle ce *déplacement* un VECTEUR défini par
- une **direction** : celle de la droite (AB) ;
- un **sens** : celui de A vers B ;
- une **norme** : qui est égale à la longueur AB.

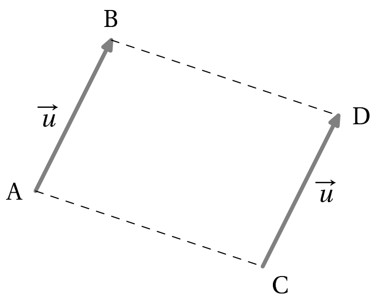
il ne faut pas confondre sens *et* direction *: par exemple* $\overrightarrow{\mathrm{IH}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *ont la même direction (car les droites (AB) et (IH) sont parallèles) mais n'ont pas le même sens.*

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ sont donc les *représentants* d'un même vecteur car ils ont même sens, même direction et même norme : on peut donc désigner ce vecteur par un nom unique, par exemple $\overrightarrow{d}$.

La *norme* du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est égale à la longueur AB. Pour désigner la norme de $\overrightarrow{d}$, on utilise $\|\overrightarrow{d}\|$. On a

$$\|\overrightarrow{d}\| = \mathrm{AB} = \mathrm{DE} = \mathrm{HI}$$

Remarque 1 1 : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{u}$ *si et seulement si ABDC est un parallélogramme :*

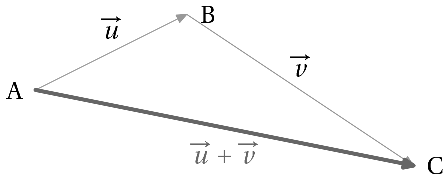


Remarque 2 2 : *Dans mon jeune temps, on disait que deux vecteurs* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ *étaient égaux*[a] *si et seulement si les segments* [A ; D] *et* [B ; C] *avaient le même milieu : pourquoi ?*

[a] En fait, on disait qu'ils étaient *équipolents*...

II - Somme de vecteurs

Le secret : *je me déplace de A vers B puis de B vers C : globalement, je suis parti de A et je suis arrivé en C*

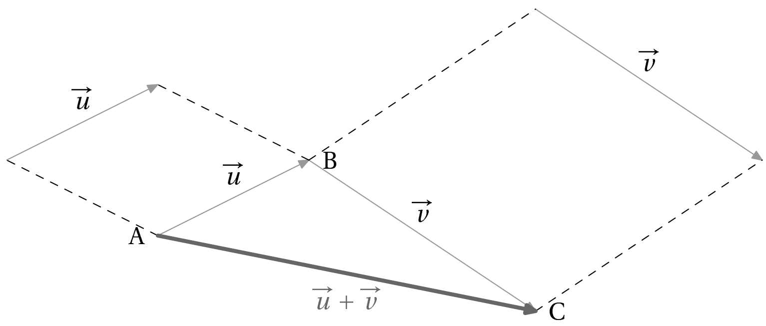


C'est en fait la fameuse

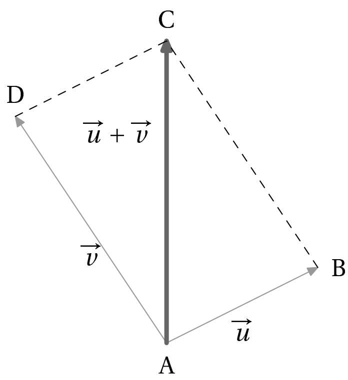
Relation de CHASLES

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Mais qu'en est-il de cette somme lorsqu'on considère deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
Il suffit de prendre des *représentants* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ bien choisis :



On peut aussi « penser parallélogramme »



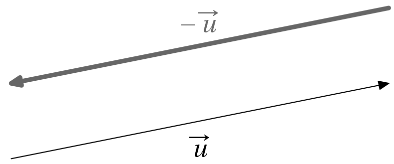
III - Vecteur nul - Opposé d'un vecteur

Je pars de A, je vais en B et je retourne en A : la relation de CHASLES le confirme

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$$

Que peut-on dire de ce vecteur $\overrightarrow{AA}$?
Quelle est sa norme ?

Quelle est sa direction ?
Quel est son sens ?
On appelle ce vecteur de norme nulle le *vecteur nul* et on le note $\overrightarrow{0}$.
Plus généralement si on considère un vecteur $\overrightarrow{u}$, on peut toujours trouver un vecteur de même direction, de même norme et de sens opposé : quand on l'ajoute à $\overrightarrow{u}$, on obtient le vecteur nul.
On l'appelle le *vecteur opposé* de $\overrightarrow{u}$ et on le note bien sûr $-\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$



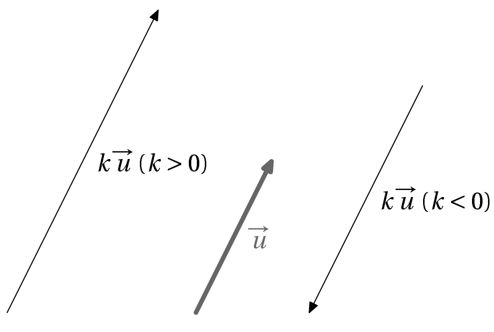
IV - Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Nous avons déjà abordé le problème en parlant de l'opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$ qu'on note $-\overrightarrow{u}$, c'est à dire $(-1)\times\overrightarrow{u}$.
Nous pouvons aisément imaginer que le vecteur $3\overrightarrow{u}$ est en fait égal à $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}$, et les additions de vecteurs, on connaît !

Nous pouvons même comprendre que $-3\overrightarrow{u}$, c'est $\left(-\overrightarrow{u}\right)+\left(-\overrightarrow{u}\right)+\left(-\overrightarrow{u}\right)$

Vous comprendrez donc sans problème la définition suivante

Définition 1 Produit d'un vecteur par un nombre réel
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul. Alors on note $k\overrightarrow{u}$ le vecteur
- ayant la même direction que $\overrightarrow{u}$;
- ayant le même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k>0$, le sens contraire sinon ;
- ayant pour norme $k\left\|\overrightarrow{u}\right\|$ si $k>0$ et $-k\left\|\overrightarrow{u}\right\|$ sinon.



Ce petit dessin résume les différents cas de figure.

.

V - Vecteurs colinéaires

a. Définition

Nous avons remarqué que $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ avaient la même direction.
Inversement, si deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction, alors on peut imaginer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

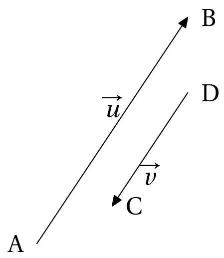
Par exemple, s'ils ont le même sens, alors le vecteur $\dfrac{\|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$ a

- le même sens que $\overrightarrow{v}$ (car …
- la même direction que $\overrightarrow{v}$ (car …
- la même norme que $\overrightarrow{v}$ (car …

donc $\overrightarrow{v} = \dfrac{\|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$, ce qui confirme notre supposition.
Avant de résumer ce résultat, un peu de vocabulaire :

Définition 2 Vecteurs colinéaires
On dit que deux vecteurs sont *colinéaires* si, et seulement si, ils ont la même direction.

Remarque 3 3 : *Deux COpains partagent leur pain, deux COrrecteurs du Bac partagent le même recteur, deux vecteurs COlinéaires partagent la même ligne…*



Notre observation précédente va donc nous permettre d'énoncer le théorème primordiale suivant :

Théorème 1
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$

Vous ferez bien attention à parler de vecteurs colinéaires et non pas de vecteurs parallèles ! Deux droites peuvent être parallèle si elles ont tous leurs points ou aucun point en commun. On ne peut pas dire la même chose des vecteurs car les vecteurs … n'ont pas de points ! Ce sont des déplacements, pas des ensembles de points comme les droites.

b. Conséquences

1. Si on arrive à montrer que deux *vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *colinéaires*, on pourra en déduire que les *droites* (AB) et (CD) sont *parallèles*.
2. Si on arrive à montrer que deux *vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont *colinéaires*, on pourra en déduire que les *droites* (AB) et (AC) sont *parallèles*. Or, comme vous l'avez remarqué, les droites (AB) et (AC) ont le point A en commun. Que pensez-vous de 2 droites parallèles ayant un point en commun ? Elles sont bien sûr …… [b]

   Et donc les points A, B et C appartiennent à une même droite : ils sont *alignés*.

[b] D'après un des axiomes d'Euclide qui est la base de la géométrie que vous étudiez au lycée : « par deux points distincts du plan il passe une droite et une seule »

À retenir
Montrer que deux vecteurs sont colinéaires peut nous aider à montrer que deux droites sont parallèles ou que trois points sont alignés.

Le problème va être d'arriver à prouver que deux vecteurs sont colinéaires : il suffira de « penser BASE » ...

VI - Base du plan vectoriel

Euh.. le plan vectoriel, c'est quoi ? Disons que c'est l'ensemble des déplacements en dimension 2. On dira alors que

Définition 3 Base
Deux vecteurs forment une base du plan vectoriel si, et seulement si, ils NE sont PAS colinéaires.

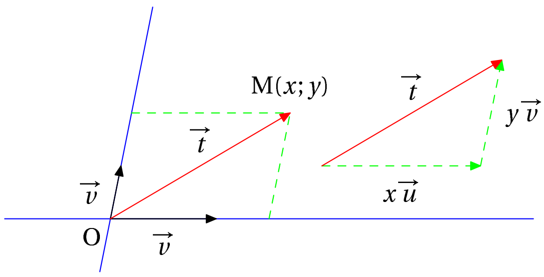
Et on admettra le résultat primordial suivant :

Théorème 2
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs NON colinéaires : ils forment une base du plan vectoriel. Alors on peut exprimer n'importe quel vecteur $\vec{t}$ sous la forme

$$\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

avec x et y des réels. Les nombres x et y sont appelés les COORDONNÉES de $\vec{t}$ dans la BASE $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

Le secret tient dans le dessin suivant :



Nous n'irons pas plus loin pour l'instant, mais nous retiendrons qu'il sera utile d'exprimer chaque vecteur d'un problème donné en fonction de deux vecteurs de base intelligemment choisis...

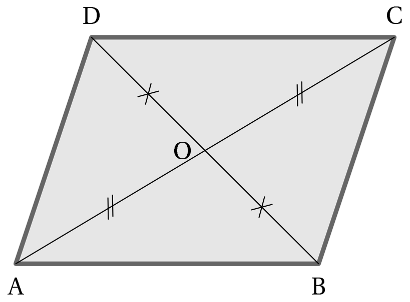
VII - Des exercices... basiques.

Nous allons étudier toutes sortes d'exercices qui nous fourniront autant d'outils pour résoudre nos enigmes mathématiques...

a. « Voir » des égalités vectorielles

Considérez avec la plus grande attention un parallèlogramme ABCD de centre O : donnez un maximum d'égalités vectorielles. En particulier, trouvez des égalités vectorielles qui permettront de caractériser[c] le milieu d'un segment.

[c] C'est à dire qui permettent de conclure que le point étudié est à coup sûr le milieu du segment étudié.



Nous allons ainsi pouvoir résoudre l'exercice suivant :

Exercice 1 Parallèlogrammes et milieux

ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points M, N, P et Q sont tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$$

1. a) Démontrez que $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DP}$.

b) Déduisez-en que O est le milieu de [MP].

2. Démontrez de même que O est milieu de [QN].

3. Déduisez des questions précédentes la nature du quadrilatère MNPQ.