

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad 4y'' + 12y' + 9y = 36,$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $4y'' + 12y' + 9y = 0$.
2. Vérifier que la fonction h , définie pour tout réel x par $h(x) = 4$, est une solution particulière de (E). En déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 5$ et $f'(0) = 0,5$.

Partie B - Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (2x + 1)e^{-1,5x} + 4.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Ecrire $f(x)$ sous forme développée. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Soit f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .

Partie C - Représentation graphique et calcul d'aire

On considère un repère orthonormal du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f et \mathcal{D} la droite d'équation $y = 4$.

1. Montrer que la droite \mathcal{D} est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
2. Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à la droite \mathcal{D} .
3. Pour x appartenant à $[-1/2 ; 3]$, tracer la courbe \mathcal{C} ainsi que la droite \mathcal{D} (unité graphique : 3 cm).
4. On considère l'aire \mathcal{A} du domaine plan délimité sur le graphique par la courbe \mathcal{C} , la droite \mathcal{D} et les droites Δ et Δ' d'équations respectives $x = -0,5$ et $x = 3$.
 - a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{-0,5}^3 2xe^{-1,5x} dx$.
 - b) Exprimer \mathcal{A} à l'aide d'une intégrale.
 - c) En déduire la valeur exacte de \mathcal{A} en cm^2 , puis en donner une valeur approchée décimale arrondie à 10^{-2} .