1 Première énigme

Robert et Marcel ont chacun une calculatrice. Pendant la récréation, ils tapent le même nombre sur leur calculatrice.

Ensuite, Robert appuie sur les touches suivantes :

$\boxed{}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{Entrée}}$

alors que Marcel tape :

$\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{Entrée}}$ $\boxed{}$ $\boxed{4}$ $\boxed{+}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\text{Entrée}}$

Incroyable ! Ils obtiennent le même résultat...

Quel nombre ont-ils pu bien choisir ?...

2 Deuxième énigme

À la récréation suivante, nos deux amis délaissent leurs camarades (d'ailleurs ils tapotent tous sur leurs portables avec les écouteurs dans les oreilles alors de toute façon..) et continuent à jouer.

Ils choisissent un nouveau nombre.

Ensuite, Robert appuie sur les touches suivantes :

$\boxed{}$ $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{Entrée}}$

alors que Marcel tape :

$\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{Entrée}}$ $\boxed{}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{Entrée}}$

Incroyable ! Ils obtiennent encore le même résultat...

Quel nombre ont-ils pu bien choisir cette fois-ci ?...

3 Troisième énigme

Ginette et Marie-Françoise essaient de rentrer en contact avec Robert et Marcel et jouent dans ce but au même jeu.

Elles choisissent un nombre.

Ensuite, Ginette appuie sur les touches suivantes :

$\boxed{}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{Entrée}}$

alors que Marie-Françoise tape :

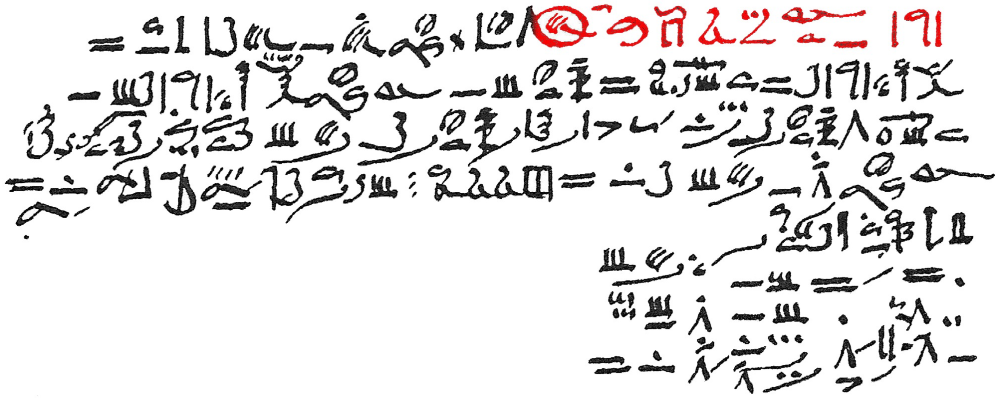
$\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{Entrée}}$ $\boxed{}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\text{Entrée}}$

Époustouflant ! Elles obtiennent elles aussi le même résultat...

Quel nombre ont-elles pu bien choisir ?...

4 Quatrième énigme

L'écossais Henry RHIND découvrit en 1858 près de l'antique ville égyptienne de Thèbes ce papyrus qui porte depuis son nom :



Il fut écrit en écriture *hiératique* vers 1650 ans avant JC par le scribe AHMÈS.
Il contient 87 problèmes mathématiques dont la plupart sont issus de travaux babyloniens datant de 2000 avant JC.
Résolvez le 31^{e} problème :

« Une quantité, ses deux-tiers, son demi, son septième ajouté devient 33. »
et le 29^{e} :

« Ajoute les deux-tiers, ajoute le tiers, retranche les deux-tiers, il reste dix. »
Avant le développement des écritures modernes en algèbre, on utilisait souvent la *méthode de la fausse position.*
Il s'agissait de prendre un nombre au hasard à la place de la quantité cherchée et de noter le résultat obtenu. À l'aide d'une « règle de trois », on trouvait alors la quantité cherchée.
Par exemple, pour le 31^{e} problème :
Prenons 42
Ajoutons ses deux-tiers : $21+\frac{2}{3}42=21+28=49$
ajoutons le demi : $49+\frac{1}{2}42=49+21=70$
ajoutons le septième : $70+\frac{1}{7}42=70+6=76$
Le résultat est alors

$$\frac{33}{76}42$$

POURQUOI ?

5 Naissance de l'algèbre

Voici notre héros

أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي

ou si vous préférez
Abu 'Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi
Son livre le plus célèbre, qu'il a écrit entre 813 et 833 alors qu'il travaillait à *la maison de la sagesse* de Bagdad, se nomme :

الكتاب المختصر فى حساب الجبر والمقابلة

c'est-à-dire :
Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab *al-jabr* wa-l-muqabala
ou bien encore :

L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison

- Pas de notations : tous les nombres et calculs sont décrits par des phrases ;
- nombres (*dirham*) ;
- racines (*ce qui est caché...*)
- biens (*« mal » en arabe*) carrés des racines.

Al-jabr signifie réduction, au sens de « réduction d'une fracture ». « Algebrista » est d'ailleurs entré dans la langue espagnole pour désigner un rebouteux.
L'al-jabr consiste à réduire l'équation en éliminant les soustractions par addition de termes dans les deux membres.
En effet, à l'époque d'Al-Khwarizmi, on ne travaillait qu'avec des entiers positifs.
Par exemple :

$$x^2 = 40x - 4x^2$$

est transformé, par al-jabr, en

$$x^2 + 4x^2 = 40x$$

puis

$$5x^2 = 40x$$

En effet, Al-Khawarizmi nomme les termes soustraits (comme $4x^2$ dans l'exemple précédent) : nâqis, « terme enlevé ».
Le même mot est employé pour désigner le membre manquant d'un amputé.
Al-jabr consiste donc à restaurer ce qui est manquant dans une équation.
Al-muqabala signifie « confrontation ».

$$x^2 + 5 = 40x + 4x^2$$

contient des carrés dans les deux membres, chaque membre est pourtant une somme.
Al-muqabala consiste donc à soustraire une quantité afin que des quantités de même type (dirham, racine ou carré) ne puissent se trouver à la fois dans les deux membres de l'équation.
Dans

$$x^2 + 5 = 40x + 4x^2$$

on soustrait x^2 pour obtenir

$$5 = 40x + 3x^2$$

On retrouve alors un des six types d'équations qu'Al-Khwarizmi a étudié. Une méthode de résolution générale de chaque type était proposée ainsi qu'une démonstration, souvent géométrique.
Voici un problème proposé par Al-Khwarizmi :

Un bien et dix de ses racines égale trente-neuf dirhams.

Il y a une autre figure qui mène également à cela et c'est : la surface (AB), étant le bien, nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous divisons par deux les dix, elles deviennent cinq, nous les transformons en deux surfaces sur les flancs de la surface (AB), et ce sont les deux surfaces (J), (N).La longueur de chacune des deux surfaces est cinq coudées -et c'est la moitié des dix racines- et sa largeur est comme le côté de la surface (AB).Il nous reste alors un carré dans l'angle de la surface (AB), et c'est cinq par cinq, et c'est la moitié des dix racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface. Or nous savons que la première surface est le bien et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont dix racines. Tout cela est donc trente neuf,et il reste pour compléter la surface la plus grande, un carré de cinq par cinq, et c'est vingt-cinq.Nous l'ajoutons à trente neuf afin que se complète la surface la plus grande, et c'est la surface (DE).Tout cela vaudra soixante-quatre. Nous prenons sa racine, et c'est huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si nous lui retranchons l'équivalent de ce que nous lui avons ajouté -et c'est cinq- il reste trois, et c'est le côté de la surface (AB) qui est le bien, et c'est sa racine ; et le bien est neuf.
Faites un joli dessin te réfléchissez à la méthode proposée par Al.
Essayez maintenant avec $x^2 + 6x = 40$ puis avec $x^2 + 6x = -10$...

6 Les notations

Nous venons de voir qu'Al-Khwarizmi n'utilisait pas de notations spéciales pour désigner les équations qu'il résolvait.
Cependant, vous avez pu découvrir au collège que cela rend pourtant des services.
Il a fallu des siècles pour arriver au stade actuel.

- DIOPHANTE, III^e siècle : $\Delta^{\Upsilon}\delta\ \zeta\gamma\ \varepsilon\sigma\tau\iota\ \iota$
- Nicolas CHUQUET, fin XV^e siècle : 4^2 p 3^1 egault 10^0
- TARTAGLIA, début XVI^e : 4q p 3R equale 10N
- Simon STÉVIN, fin XVI^e : 4② +3① egales 10⓪
- François VIÈTE, vers 1600 : 4 in A quad +3 in A æquatur 10
- René DESCARTES, vers 1640 : $4xx + 3x \propto 10$
- Guillaume CONNAN, vers 2010 : $4x^2 + 3x = 10$

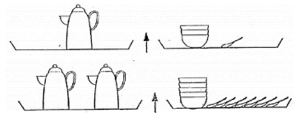
Vous remarquez donc que les notations sont relativement récentes mais on sait résoudre des équations du second degré depuis 4 000 ans...Enfin, c'est encore un mystère en 2^nde^9...
Essayez Al-jabr et muqabala ou ce que vous voulez sur :

- $3x^3 - 7x^2 + 3 = x^4 + x^2 - 1$
- $x^2 + x - 7 = x^2 + 2x - 9$
- $x^3 + 3x^2 - 5x - 5 = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 10$
- $3x + 2 = 7x - 5$
- $3x - 5 = 7x + 2$
- $7x - 5 = 3x + 2$
- $7 - 5x = 3 + 2x$
- $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3} = 4x - 5$
- $\frac{4}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}x - 7$

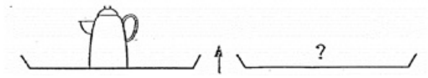
Choisissez la méthode que vous voulez pour résoudre les problèmes suivants :

– Y a t-il un nombre qui donne le même résultat si je le multiplie par 2 et que j'ajoute 14 ou si je le multiplie par 4 et que je retranche 18 ?
– Avec la somme dont je dispose, si j'achète 2 boîtes de Canigou il me restera 14 €, mais si je veux acheter 4 boîtes de Canigou il me manque 18 €. Quel est le prix d'une boîte de Canigou et quelle est la somme dont je dispose ?
– Lors de la rentrée scolaire, chaque élève de seconde reçoit 30 coups de bâtons, alors que les élèves de 1^{up} et de T^{ale} en reçoivent chacun 45. Le proviseur a reçu dans son bureau 80 élèves et a donné 3 225 coups de bâtons. Combien d'élèves de seconde le proviseur a-t-il reçu dans son bureau ?

Sur les plateaux de ces deux balances il y a des pots, des bols et des petites cuillères. Ces balances sont en équilibre.



Combien faut-il mettre de petites cuillères sur le plateau de droite pour que la balance soit en équilibre ?



D'après IREM d'Aquitaine

Un père a 41 ans. Il a trois enfants de 11, 9 et 4 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses trois enfants ?

Un père a 41 ans. Il a quatre enfants de 19 ans, 15 ans, 12 ans et 10 ans. L'âge du père a-t-il été ou sera-t-il égal à la somme des âges de ses quatre enfants ?

Si René DESCARTES nous a donné des notations fort pratiques, il a surtout relié calculs et géométrie : c'est le point fort de notre année de seconde et c'est l'objet de notre prochaine aventure...