Quinzième Aventure

APPROCHE INTUITIVE DE L'INTÉGRATION

Résumé Tout le monde le croyait mort : il est pourtant de retour. Mais trop longtemps prisonnier de la terrible tribu des fisyssiuns, Mathemator a adopté leur langage et semble avoir oublié sa rigueur mathématique...

A - LE PRINCIPE DE SOMMATION INFINIE

A - 1 : Qu'est-ce qu'une intégrale ?

Téhessin : Tout d'abord, je suis heureux de vous retrouver sain et sauf aprés ce terrible séjour chez les fizyssiuns.

Mathémator : Merci, cher disciple.

Téhessin : Avide de connaissances mathématiques, j'ai jeté un coup d'œil sur mon livre de Terminale pendant votre absence et j'ai cru comprendre qu'une intégrale était une aire.

Mathémator : C'est un point de vue Téhessin, mais pour bien appréhender la notion d'intégrale, il vaut mieux revenir à l'interprétation physique, le seul point de vue en termes d'aire est trop réducteur.

Les physiciens utilisent les intégrales pour calculer bien d'autres choses que des aires : une masse, une énergie, un volume ou encore un potentiel électrique peuvent s'écrire comme l'intégrale d'une fonction d'une variable sur un segment. Dans tous les cas, y compris celui du calcul d'aire, c'est la notion intuitive de sommation infinie qui permet de faire ce lien entre une grandeur physique et une intégrale. Pour vous faire une idée de ce qu'est une sommation infinie, je vous propose d'examiner ensemble trois exemples : un calcul de distance, un calcul d'aire et un calcul de volume.

A - 2 : Comment calculer la distance parcourue connaissant les vitesses instantanées ?

Mathémator : Supposez, Téhessin, que le compteur kilométrique de votre scooter soit en panne et que vous ne disposiez que du compteur des vitesses qui donne à tout instant t la vitesse arithmétique $v(t)$. Pouvez-vous calculer la distance ℓ parcourue entre deux instants t_1 et t_2 ?

Téhessin : Si la vitesse est constante et égale à v_0, on a $\ell = v_0\,(t_2 - t_1)$. Mais sinon..., je ne vois pas.

Mathémator : Eh bien sinon, on se ramène à des intervalles de temps « très petits » où la vitesse est « presque constante ». En cela, nous allons raisonner en physicien, le but étant d'avoir une bonne intuition de ce qu'est une intégrale, mais il ne faut pas croire que vous pourrez utiliser ce genre d'arguments dans un raisonnement mathématique. Je m'explique.
Nous allons imaginer que l'intervalle $[t_1,t_2]$ est découpé en une infinité de petits intervalles de temps de durée dt. Pendant l'un de ces intervalles $[t,t+dt]$, on parcourt approximativement la distance $v(t)\,dt$, car l'intervalle étant infiniment petit, on peut supposer que la vitesse est constante et égale à $v(t)$ entre t et $t+dt$. La distance totale ℓ correspond donc à la somme, en nombre infini, de ces distances infiniment petites, pour t variant de t_1 à t_2. En notation intégrale, cela s'écrit

$$\ell = \int_a^b v(t)\,dt.$$

Téhessin : Mais pourquoi utilise-t-on le symbole $\int$?

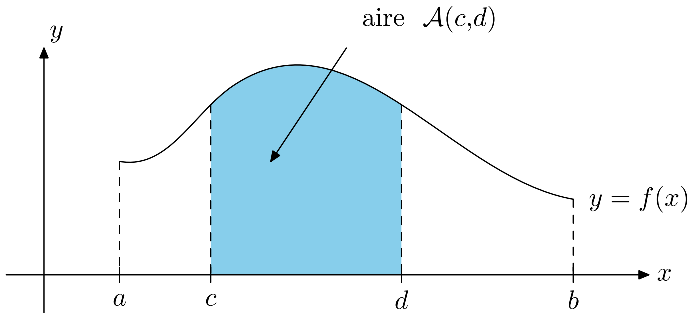
Mathémator : Parce qu'il représente le S de *summa* qui signifie somme en latin ; il a été inventé par Leibniz de même que les notations dt, dx... Vous voyez bien qu'une intégrale est avant tout une somme !

Téhessin : D'autre part, je ne vois pas bien quel sens précis on pourrait donner à cette somme en nombre infini de quantités infiniment petites...

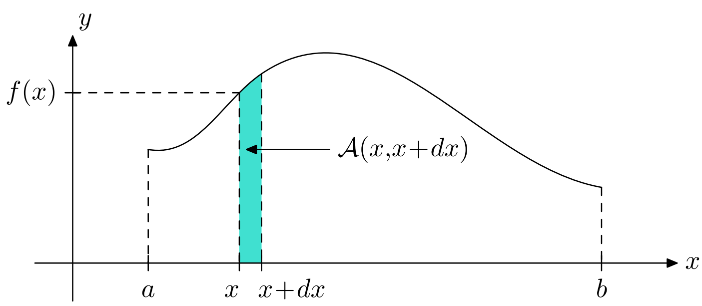
Mathémator : Il y a effectivement un vrai problème de définition. Mais vous ne saurez exactement ce que représente $\int_a^b v(t)\,dt$ que l'année prochaine. En attendant, voici d'autres exemples.

A - 3 : Quelle est l'aire délimitée par une courbe ?

Mathémator : Parlons un peu, Téhessin, de l'aire d'une portion de plan délimitée par la courbe représentative d'une fonction. On considère donc une fonction f continue sur $[a,b]$, et pour c et d dans $[a,b]$ avec $c < d$, on note $\mathcal{A}(c,d)$ l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = c$, $x = d$, $y = 0$ et la courbe d'équation $y = f(x)$.



Pour comprendre comment peut se calculer $\mathcal{A}(a,b)$, nous allons, comme pour le calcul de distance de tout à l'heure, découper l'intervalle $[a,b]$ en une infinité de petits intervalles de la forme $[x,x+dx]$ correspondant à une petite aire $\mathcal{A}(x,x+dx)$.



Téhessin : Et j'imagine qu'on va dire que $\mathcal{A}(a,b)$ est la somme en nombre infini des aires $\mathcal{A}(x,x+dx)$ infiniment petites pour x variant de a à b.

Mathémator : Quel talent !

Téhessin : J'ai compris le principe, mais en quoi suis-je avancé, une fois que j'ai fait ce découpage ? Je me retrouve avec une infinité de calculs à faire, au lieu d'un seul.

Mathémator : Certes, mais ce qui est intéressant, c'est qu'on peut donner une valeur approximative de $\mathcal{A}(x,x+dx)$. En effet, comme dx est infiniment petit, f est presque constante et égale à $f(x)$ sur tout l'intervalle $[x,x+dx]$. Donc $\mathcal{A}(x,x+dx)$ vaut à peu près l'aire d'un rectangle de base dx et de hauteur $f(x)$, c'est à dire $f(x)dx$.
Avec les mêmes notations que dans le problème précédent, on a donc, en faisant la somme pour x variant de a et b des aires infiniment petites $f(x)dx$

$$\mathcal{A}(a,b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Voilà pourquoi un calcul d'aire peut se ramener à un calcul d'intégrale.

A - 4 : Quel est le volume intérieur à une sphère ?

Téhessin : Après la dimension 1 et la dimension 2, maintenant la dimension 3, c'est ça ?

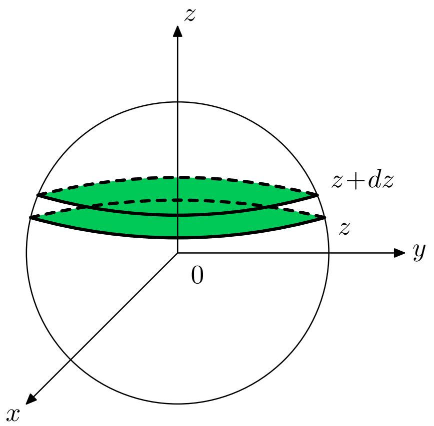
Mathémator : Oui, une distance, une aire, un volume sont en fait des *mesures* d'objets à une, deux ou trois dimensions. Et qui dit mesure, dit intégrale.

Téhessin : Vous allez donc exprimer le volume intérieur à une sphère comme une intégrale.

Mathémator : Effectivement, nous allons imaginer que l'intérieur de la sphère est découpé en une infinité de parties de volume infiniment petit, puis effectuer la somme de ces petits volumes. Il y a plusieurs manières de procéder : découper l'intérieur de la sphère en une infinité de sphères concentriques, comme des poupées russes, ou alors considérer qu'elle est composée de tranches horizontales infiniment fines.

Téhessin : Je préférerais les tranches Professeur, car je ne joue plus à la poupée.

Mathémator : Comme vous voulez. Alors commençons par supposer que la sphère a pour rayon R et pour équation dans un repère orthonormé $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, et découpons.



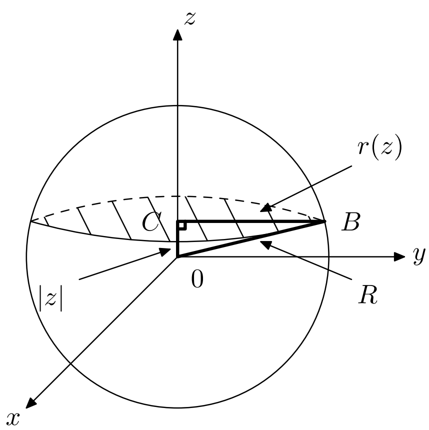
Il faudrait maintenant « calculer » le volume de la tranche hachurée qui correspond aux points dont l'altitude est comprise entre z et $z + dz$. Et cette fois, Téhessin, en quoi va consister l'approximation ?

Téhessin : Facile, facile, je vais dire que cette tranche a un rayon constant puisque son épaisseur dz est infiniment petite, et donc c'est un cylindre.

Mathémator : Oui, poursuivez donc le calcul, je vois que vous êtes bien parti !

Téhessin : Cette tranche a approximativement pour volume $\pi\, r^2(z)\, dz$ où $r(z)$ est le rayon de la section d'altitude z. Il me reste à calculer $r(z)$, mais là, je suis un peu en panne. Un petit indice, Professeur ?

Mathémator : Il tient en un mot : Pythagore.
Téhessin : Merci, Professeur.



D'après le théorème de Pythagore, on a $r^2(z) + z^2 = R^2$ et le volume total est donc

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)dz.$$

Et j'ai fini !

Mathémator : Très bien, Téhessin, mais ça ne sera fini que lorsqu'on aura simplifié cette intégrale ! Cela se fait en utilisant les techniques de calcul d'intégrales à l'aide de primitives, et avec ces techniques, on obtient facilement la formule classique $V = \dfrac{4}{3}\,\pi\,R^3$.

B - EXERCICES : INTÉGRATION SANS PRIMITIVES

Exercice XV-1

Calculez les intégrales suivantes, après avoir fait un petit dessin.

$$I_1 = \int_a^b k\,dx \quad \text{avec} \quad k > 0 \qquad I_2 = \int_0^4 (3 - x)\,dx \qquad I_3 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Exercice XV-2

Dans cet exercice, vous pourrez utiliser les résultat suivant : $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$ pour calculer certaines des intégrales proposées.

1) $I_4 = \displaystyle\int_0^1 (5x^2 + 3x)\,dx$
2) $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^1 x^2\,dx$
3) $I_6 = \displaystyle\int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 8)\,dx$
4) $I_7 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^5 x\,dx$

Exercice XV-3

1) Prouvez que, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{t^2}{2} \leqslant \dfrac{t^2}{1+t} \leqslant t^2$.

2) Déduisez-en un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt$.

Exercice XV-4

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Déterminez la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{1/n} f(x)\,dx$$

Exercice XV-5

Étudiez la limite de la suite de terme général $u_n = \int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$.

Vous pourrez commencer par encadrer e^{-x} sur $[n,n+1]$ en fonction de n.

Exercice XV-6

On pose $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

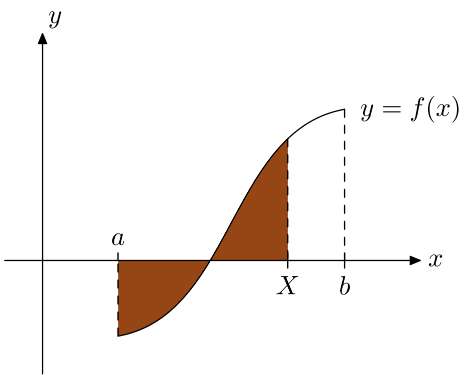
Prouvez que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx$ et déduisez-en $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

C - LIENS ENTRE INTÉGRALES ET PRIMITIVES

Mathémator : Pour bien comprendre ce lien fondamental, nous allons utiliser l'interprétation de l'intégrale en termes d'aire. On se donne $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et on note, pour $x \in [a,b]$,

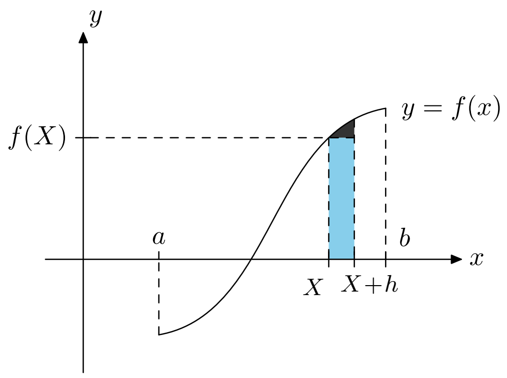
$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

l'aire grisée



Le problème est donc de calculer $S(b)$ connaissant f. Mais nous allons dans un premier temps prendre le problème à l'envers, et montrer comment retrouver f à partir de S.

Le raisonnement suivant est dû à Newton, mais je vais vous l'exposer en langage moderne. Fixons x dans $[a,b[$. Examinons ce qui se passe si h est « petit ».



Je pense que vous serez d'accord pour dire que, comme h est petit, l'aire de la région en noir semble négligeable devant l'aire du rectangle qui est en dessous.

Téhessin : Négligeable au sens physique du terme ?

Mathémator : Oui. Ensuite, comme le rectangle a pour aire $f(x).h$, on en déduit

$$S(x+h) - S(x) \simeq f(x)\,h.$$

Attention, le symbole $\simeq$ n'a pas de sens précis en mathématiques. Ce raisonnement s'apparente plutôt aux raisonnements des physiciens sur les ordres de grandeurs.
Ensuite, en divisant par h, on a

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \simeq \; f(x).$$

On constate alors que le membre de gauche est un taux d'accroissement, qui est « très proche » de la dérivée de S en x puisque h est « petit ». On obtient donc que S semble dérivable en x et que $S'(x) = f(x)$, et comme x a été pris arbitrairement dans $[a,b[$, on a « montré » que S est une primitive de f. C'était plutôt inattendu, non ?

Là encore, j'ai laissé de côté les difficultés techniques pour vous faire comprendre l'idée. Je ne vous ai pas montré rigoureusement que $S' = f$. En particulier, j'ai sous-entendu que h était positif, et il faudra étudier le cas où h est petit et négatif, sinon nous aurions seulement démontré que la dérivée à droite de S en x existe et vaut $f(x)$.

Téhessin : C'est joli, mais ça ne nous dit toujours pas comment calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Mathémator : Nous y sommes presque. Considérons une primitive quelconque de f sur $[a,b]$, que nous noterons F. Vous vous souvenez que nous avons montré que deux primitives d'une même fonction définie sur un intervalle diffèrent d'une constante. Donc, il existe un réel k tel que $S(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in [a,b]$. Ainsi, comme $S(a) = 0$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = S(b) = S(b) - S(a) = \big(F(b) + k\big) - \big(F(a) + k\big) = F(b) - F(a).$$

La boucle est bouclée ! Maintenant, $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ est très simple à calculer.

Avec la notation $F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$, on obtient par exemple :

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Finalement :

Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et soit F une primitive de f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

D - QUIZZ

Question 1. Vrai ou faux?

L'intégrale d'une fonction continue et impaire est nulle.

Question 2. Vrai ou faux?

Si $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 0$, alors f est impaire.

Question 3.

Trouvez une fonction paire, non identiquement nulle sur $[-2,2]$, telle que $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 0$.

Question 4. Vrai ou faux?

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\int_{1}^{x} f(t)\,dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Question 5.

Trouvez une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} f(t)\,dt = +\infty$

Question 6.

Trouvez une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} f(t)\,dt = 32$

Question 7. Vrai ou faux?

Soit u un réel strictement positif, alors $\int_{0}^{u} E(x)\,dx \in \mathbb{N}$, $E(x)$ désignant la *partie entière* de x.

Question 8. Vrai ou faux?

$\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)\,dt|$

Question 9.

Trouvez une fonction f telle que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| < \int_a^b |f(t)\,dt|$

Question 10.

Trouvez une *condition nécessaire et suffisante* sur f pour que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)\,dt|$

Question 11. Vrai ou faux?

$\int_{2}^{3} xt^2\,dt = \int_{2}^{3} xt^2\,dx$

Question 12. Vrai ou faux?

$$\int_2^3 xt^2\,dt = \int_2^3 x^2t\,dx$$

Question 13.

Trouvez deux fonctions f et g continues sur [1,2], distinctes, telles que $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt = \int_1^2 g(u)\,du$

Question 14. Vrai ou faux?

Si f est bornée sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(u)\,du$ l'est aussi.

Question 15. Vrai ou faux?

Si f est croissante sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(u)\,du$ l'est aussi.

E - LE PROBLÈME DE L'IVROGNE

Un ivrogne part à un instant donné d'un point donné. À chaque seconde, il fait un pas dans une direction inconnue (et qui peut changer de façon arbitraire à chaque pas). Comme il se fatigue, ses pas sont de plus en plus courts. Peut-on prévoir qu'au bout d'un certain temps il restera à moins d'un mètre d'une certaine position si on admet que la longueur de son n-ième pas est $1/n$ mètre? $1/n^2$ mètre?

E - 1 : Étude de la convergence d'une série

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel ℓ. On considère la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes de rang pair de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez, à l'aide de la définition de la convergence d'une suite, que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.
2) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Quel est le lien avec l'ivrogne?
3) Exprimez $S_{2N} - S_N$. Quel est le plus petit terme de cette somme. Déduisez-en que $S_{2N} - S_N \geqslant 1/2$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.
4) Supposons maintenant que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ. En utilisant le résultat précédent et les propriétés des opérations sur les limites, montrez qu'on arrive à prouver que $0 \geqslant 1/2$. Qu'en concluez-vous sur $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
5) Résolvez alors le premier problème de l'ivrogne.

E - 2 : Utilisation du logarithme népérien et des suites adjacentes

On cherche maintenant à estimer la distance parcourue par l'ivrogne, même si l'on sait qu'elle tend vers l'infini.

1) On définit deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = S_n - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad w_n = S_n - \ln n$$

   a) Montrez que, pour tout $t \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+t) \leqslant t$.
   b) Prouvez alors que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

c) Montrez que leur limite commune γ appartient à l'intervalle $]0,1[$.

2) Montrez qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

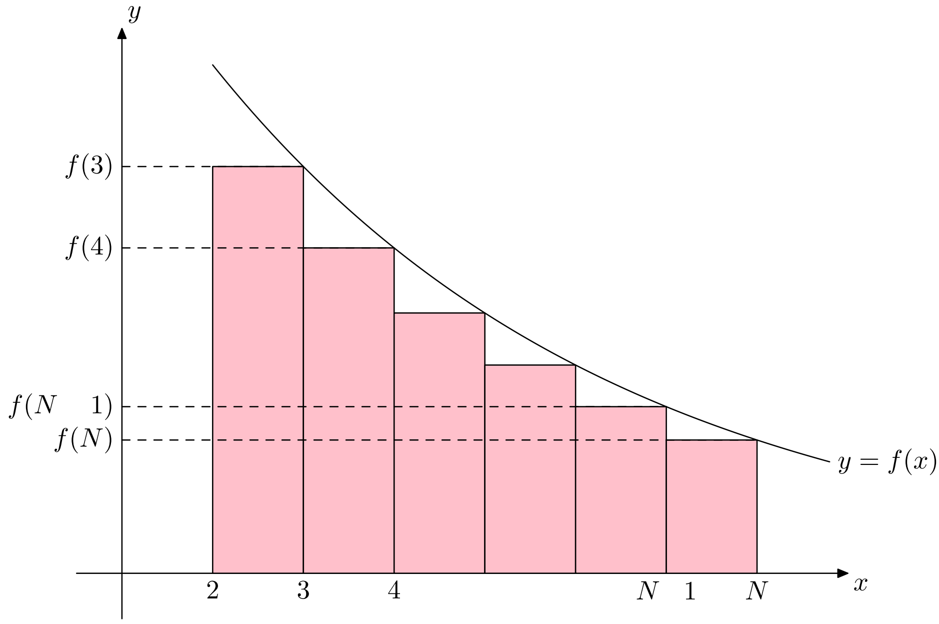
$$S_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \qquad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

3) Donnez, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donnez également une approximation de la distance parcourue par l'ivrogne au bout de 24 heures.

E - 3 : Comparaison série - intégrale

On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 1/x^2$.

1) En utilisant le schéma



la relation de Chasles et la décroissance de f, montrez que

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leqslant \int_1^N f(x)\,dx$$

2) On pose $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. En utilisant la question précédente, prouvez que la suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On notera L la limite.

3) En utilisant judicieusement des petits rectangles, un peu comme tout à l'heure, montrez que

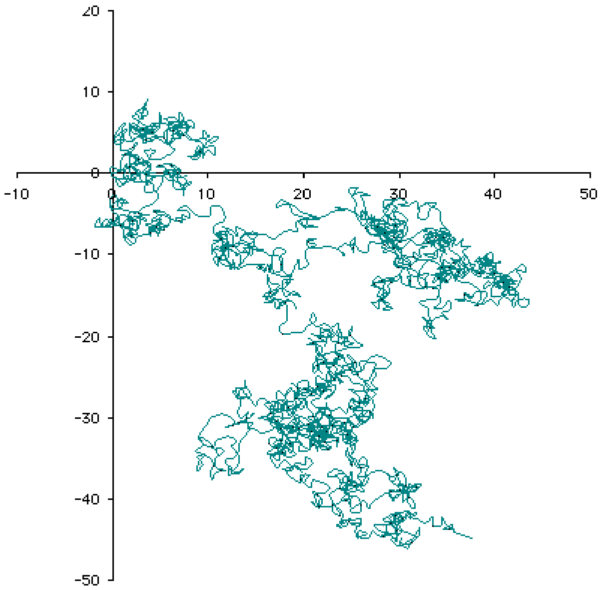
$$\int_{N+1}^{K+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{p=N+1}^{K} f(p) \leqslant \int_N^K f(t)\,dt$$

4) Soit F une primitive de f sur $]0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. En utilisant la double inégalité précédente, montrez que

$$-F(N+1) \leqslant L - \sum_{p=1}^{N} f(p) \leqslant -F(N)$$

5) Déduisez-en une valeur approchée de L à 10^{-2} près.
6) Que peut-on en déduire pour l'ivrogne?

Pour illustrer notre propos, voici la courbe de l'ivrogne issue de l'étude du mouvement Brownien, ou comment l'étude des probabilités mène à l'alcool.



F - EXERCICES DIVERS

Exercice XV-7 Style bac avec Roc

Le but de l'exercice est d'établir dans un cas particulier le lien existant entre aire sous la courbe et primitive. On prendra comme prérequis la définition suivante :

Définition : H est une primitive de h sur $[a\ ;\ b]$ si et seulement si H est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et si pour tout x de $[a\ ;\ b]$ on a $H'(x) = h(x)$.

Dans la suite on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \ln\left(t^2 + 1\right)$$

1) Expliquer pourquoi f est continue sur $[0, +\infty[$.
2) Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.
   La fonction f est représentée ci-dessous :
   Pour $\alpha \geqslant 0$, on note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et la droite d'équation $x = \alpha$.
3) a) Soit x_0 et h des réels strictement positifs. En utilisant un rectangle convenablement choisi, établir l'encadrenent

$$\ln\left(1 + x_0^2\right) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant \ln\left[1 + (x_0 + h)^2\right].$$

   b) Quel encadrement peut-on obtenir de la même manière pour $h < 0$ et $h \geqslant -x_0$?
   c) **Démontrer** que $\mathcal{A}$ est dérivable en x_0. Quel est le nombre dérivé de $\mathcal{A}$ en x_0 ?
4) Expliquer pourquoi $\ln(2) \leqslant \mathcal{A}(2) \leqslant 2\ln(5)$.

Exercice XV-8 Roc again

1) On considère la fonction numérique f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right).$$
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Pour tout réel $\alpha \geqslant 1$, on considère les intégrales 'i
$$J(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad K(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$
Le but de l'exercice est d'étudier, sans chercher à la calculer, l'intégrale $K(\alpha)$.
   a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
   b) Étudier le sens de variation de f
   c) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$.
2) a) Interpréter géométriquement le nombre $K(\alpha)$.
   b) Soit $\alpha \geqslant 1$, montrer que
$$\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leqslant K(\alpha) \leqslant \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$
   c) En déduire que
$$\frac{1}{2} \leqslant K(\alpha) \leqslant \mathrm{e}.$$
3) a) Calculer $J(\alpha)$.
   b) Démontrer que pour tout réel $\alpha \geqslant 1$
$$\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\ln(2) \leqslant K(\alpha) \leqslant \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\ln(2).$$
4) **Démonstration de cours.**
Prérequis : Définition de la limite d'une fonction en $+\infty$.
Démontrer le théorème suivant :
Soient u, v et w des fonctions définies sur $[1\ ;\ +\infty[$ telles que pour tout réel $x \geqslant 1$, $u(x) \leqslant (v(x) \leqslant w(x)$.
S'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$.
5) Déduire de ce qui précède la limite de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Exercice XV-9 Let's Roc

Partie A

On considère la fonction nutnérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}.$$
On note $\mathcal{C}$ la courbe representative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture pour tout x réel strictement positif : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$). Interpréter graphiquement le résultat.

2) Démontrer que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
3) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.
4) Construire la courbe $\mathcal{C}$ (unité graphique : 2 cm). On admettra que $\mathcal{C}$est tangente en O à l'axe des ordonnées.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Interpréter géométriquement u_n.
2) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.
3) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4) Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Partie C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) a) Démontrer que F est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
   b) En déduire le sens de variations de F.
2) a) Démontrer que pour tout réel t positif : $t + 2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.
   b) En déduire que pour tout x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$:

$$F(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

   c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$:

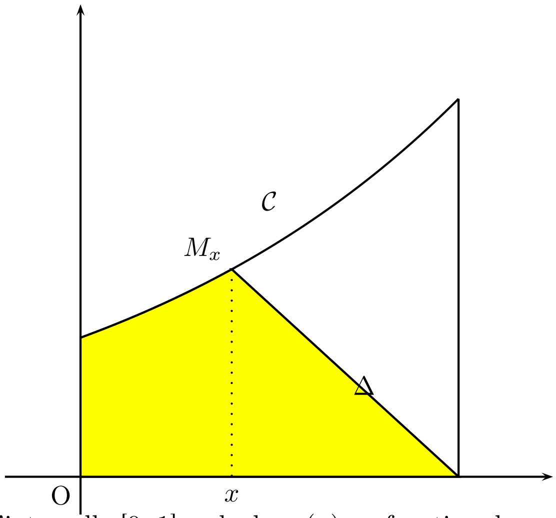
$$\int_0^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = 4 - (x+3)\mathrm{e}^{1-x}.$$

   d) En déduire que pour tout x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$: $0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}$.
3) On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice XV-10 Partage équitable

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.
On note I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.
Soient f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f'x) = \mathrm{e}^{x-1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$.
On note Δ la portion de plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à $[0\,;\,1]$ tel que, si A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α, le segment $[\mathrm{I}A]$ partage Δ en deux régions de même aire.
Pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$ on note M_x le point de coordonnées $(x,\ f(x))$ et T_x le domaine délimité par la droite $\mathrm{I}M_x$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathcal{C}$.

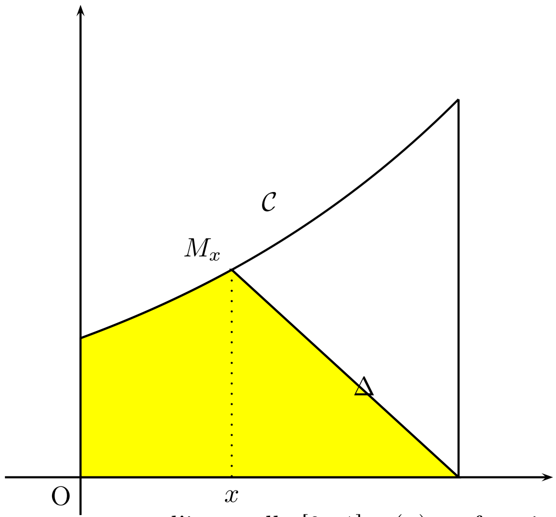
On désigne par $g(x)$ l'aire de T_x.



1) Pour x appartenant à l'intervalle $[0,\ 1]$, calculer $g(x)$ en fonction de x.
2) Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto g(x)$ sur $[0\,;\ 1]$.
3) Montrer qu'il existe un unique réel α de $[0\,;\ 1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.
4) Trouver une valeur approchée de α à 10^{-3} près par défaut.

Exercice XV-11 Partage équitable avec Roc

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.
On note I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.
Soient f une fonction positive, strictement croissante et dérivable sur $[0\,;\ 1]$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ et Δ la portion de plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à $[0\,;\ 1]$ tel que, si A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α, le segment $[\text{I}A]$ partage Δ en deux régions de même aire.
Pour tout x appartenant à $[0\,;\ 1]$ on note M_x le point de coordonnées $(x,\ f(x))$ et T_x le domaine délimité par la droite $\text{I}M_x$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathcal{C}$.
On désigne par F la fonction définie sur $[0\,;\ 1]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et par $g(x)$ l'aire de T_x.



1) Exprimer, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\ 1]$, $g(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et $F(x)$.

2) **Démonstration de cours** Démontrer que F est dérivable et a pour dérivée f.
3) Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto g(x)$ sur $[0 ; 1]$.
4) a) Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) Montrer qu'il existe un unique réel α de $[0 ; 1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.

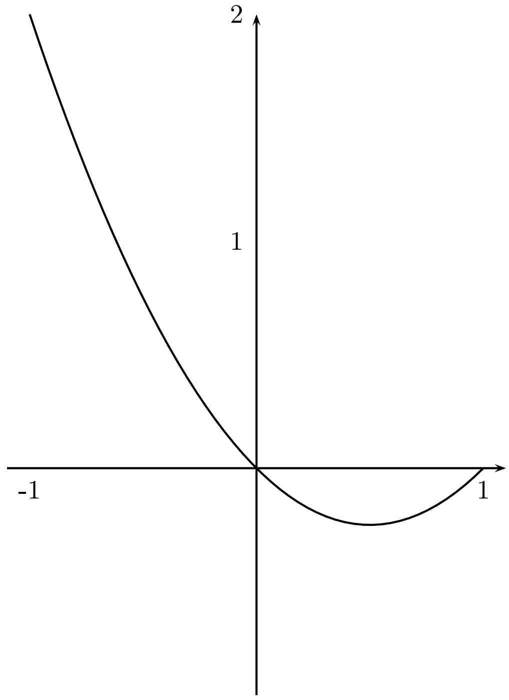
Exercice XV-12

Les questions sont indépendantes. II est demandé de justifier toutes les réponses fournies.

1) Dans chacun des cas suivants, proposer une fonction f qui vérifie les propriétés données.
   On donnera l'expression de $f(x)$.

   a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{x} + c$, la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 0 et $\ln 2$.
   b) f est définie sur $]0 ; +\infty[$, $f(2) = 4$ et, pour tout x et tout y réels strictement positifs, $f(xy) = f(x) + f(y)$.
   c) f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur $[-2 ; 2]$ est 0.

2) Soit g une fonction définie et dérivable, de dérivée g' continue sur $[-1 ; 1]$. La courbe représentative de g est donnée ci-dessous.



Les affirmations suivantes sont-elles cohérentes avec le schéma:

a) $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x = 0$?

b) $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x \geqslant -\frac{1}{2}$?

Exercice XV-13

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminez une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Exercice XV-14

Calculez en fonction du réel a appartenant à $[0,1]$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |t^2 - a|\, dt$ puis déterminez le minimum de cette intégrale quand a décrit $[0,1]$.

Exercice XV-15

À l'aide de majorations ou d'encadrements, déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx, \quad I_3 = \int_0^1 (1+x^2)^{1/n} dx, \quad I_4 = \int_1^2 \frac{e^{-nx}}{1+x^2} dx.$$

$$I_5 = \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n}\, dx, \quad I_6 = \int_0^2 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\, dx, \quad I_7 = \int_1^{1+1/n} \sqrt{1+t^n}\, dt.$$

Pour I_5, majorez $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{n \sin x}{x+n} - \sin x \right) dx$. *Pour I_7,* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+1/n)^n = e$

Exercice XV-16

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \big(f(x)\big)^n\, dx$$

dans les cas suivants :

1) pour tout $x \in [a,b]$ $\quad |f(x)| < 1$.
2) pour tout $x \in [a,b]$ $\quad f(x) = 1$.
3) pour tout $x \in [a,b]$ $\quad f(x) > 1$.

f étant continue sur $[a,b]$, il existe $\mu > 1$, $x_0 \in [a,b]$ et $\varepsilon > 0$ tels que $f(x) \geqslant \mu$ pour tout $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

Exercice XV-17

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable et de dérivée continue. Montrez que

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$$

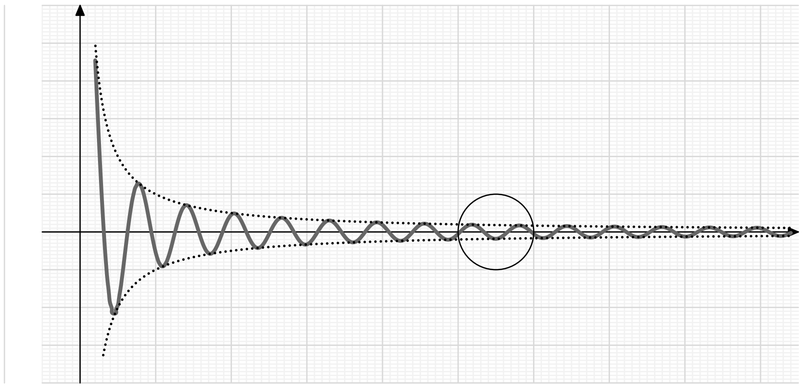
à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice XV-18 **Théorème de Riemann-Lebesgue**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et à dérivée continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_a^b f(x)\, \sin(nx)\, dx$$

1) Voici une représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x)\sin(nx)$:



Donnez une interprétation de I_n en termes d'aire pour n « grand » et déduisez-en une conjecture concernant la convergence de la suite (I_n).

2) Démontrez cette conjecture à l'aide d'une intégration par parties. Ce résultat constitue un cas particulier du théorème sus-cité.

Exercice XV-19 Lemme de Gronwall

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\text{pour tout } x \geqslant 0 \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,dt$$

Montrez que f est identiquement nulle. On pourra introduire la fonction

$$g \ : \ x \mapsto e^{-x} \int_0^x f(t)\,dt$$

et étudiez ses variations.

Exercice XV-20 Développement en série entière de $\ln(1-x)$

Soit $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrez que, pour tout $t \in [0,x]$, on a

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-x}.$$

2) Soit $x \in [-1,0]$. Montrez que pour tout $t \in [x,0]$ $\left| \dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant |t|^{n+1}$.

3) Soit $x \in [-1,1[$. Déduisez des questions précédentes que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x)$$

On obtient ainsi ce qu'on appelle un développement en série entière de $\ln(1-x)$: on « remplace » une fonction compliquée par une sorte de « polynôme infini » à coefficients entiers. Cela permet dans certains cas de simplifier des calculs (si si !). Vous verrez ça plus tard.

Exercice XV-21 Calculs de primitives

Déterminez une primitive F_k de la fonction f_k en précisant sur quel(s) intervalle(s) on a $F_k'(x) = f_k(x)$ ou calculez I_k selon les cas.

1) $f_1(x) = \tan x$

2) $f_2(x) = \sin(px)\cos(qx)$ avec p et q des entiers naturels non nuls.
3) $f_3(x)\sqrt{x^2+1}$
4) $I_4 = \displaystyle\int_1^2 3(x-1)^2 \ln(x)\,dx$
5) $I_5 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)e^{-x}\,dx$
6) $I_6 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx$
7) $I_7 = \displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x}(\ln(x)+x)^3\,dx$
8) $I_8 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+e^{-x}}$
9) $I_9 = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx$
10) $f_{10}(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$
11) $f_{11}(x) = (x-1)^2\cos x$
12) $f_{12}(x) = 3(x-1)^2\ln x$
13) $f_{13}(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$

Exercice XV-22 Transformée de Fourier du signal $s(t) = \cos(\pi t)\Pi(t)$

Il s'agit de calculer l'intégrale $X(s) = 2\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi t)\cos(2\pi f t)\,dt$ où f est un paramètre positif.

Exercice XV-23 Transformée de Laplace de la fonction rampe

On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^x te^{-pt}\,dt$ où p est un paramètre réel. Calculez $I(x)$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x)$ en discutant selon les valeurs du paramètre p.

Exercice XV-24 Discrétisation d'une équation différentielle

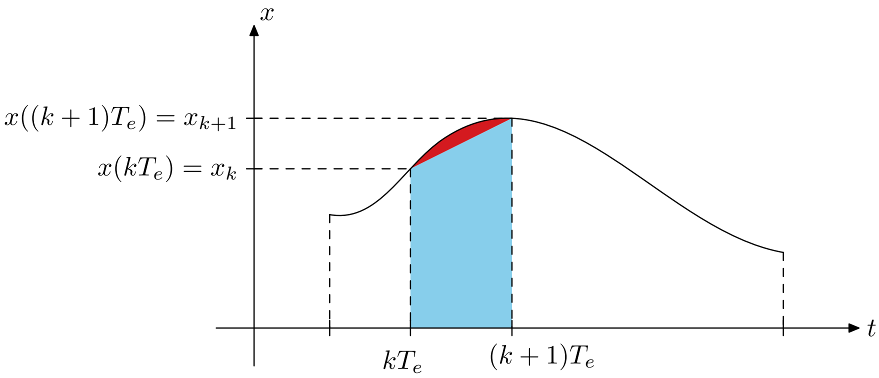
Quel est le problème?

Soit (E) l'équation différentielle $x'(t) + 3x(t) = 2$, $x(0) = 1$. Nous savons parfaitement résoudre cette équation (d'ailleurs faîtes-le : vous noterez f la solution). Nous allons voir une méthode qui va vous paraître beaucoup plus compliquée, mais qui s'avérera fort utile quand il s'agira de résoudre des équations différentielles plus sophistiquées où les méthodes habituelles de résolution ne nous permettront plus de conclure.
Nous allons « observer » la solution de l'équation à intervalle de temps régulier : la période d'échantillonnage qu'on notera T_e. On fixera par exemple $T_e = 0{,}2\,s$.
Nous allons intégrer l'équation (E) sur une période d'chantillonnage quelconque, c'est à dire sur un intervalle $[kT_e,(k+1)T_e]$, avec k un entier naturel. Cela donne, grâce à la linéarité de l'intégration :

$$\int_{kT_e}^{(k+1)T_e} x'(t)\,dt + 3\int_{kT_e}^{(k+1)T_e} x(t)\,dt = 2\int_{kT_e}^{(k+1)T_e} dt$$

On définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $x_k = x(kT_e)$.
Calculez le premier terme du premier membre ainsi que le second membre de l'équation : pas de problème.
Plus compliqué va être de calculer $\int_{kT_e}^{(k+1)T_e} x(t)\,dt$ car nous ne connaissons pas x, donc encore moins une de ses primitives. Nous allons malgré tout nous en tirer en déterminant une approximation du résultat.

Méthode des trapèzes



Il semble raisonnable de penser que plus T_e sera petit, plus l'aire rouge le sera également et donc meilleure sera l'approximation. Vous aurez également noté que cette méthode est encore plus précise que celle des rectangles proposée aux pages 4 et 8.

Maintenant, en vous souvenant de la formule $\mathcal{A}(\text{trapèze}) = \dfrac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$, donnez l'aire du trapèze bleu.

Équation aux différences

Déduisez-en que la suite (x_n) vérifie l'équation aux différences (F)

$$\frac{13}{10}x_{n+1} - \frac{7}{10}x_n = \frac{2}{5}$$

Vous reconnaissez une suite arithmético-géométrique rencontrée page ??. En déterminant la solution α de l'équation $\frac{13}{10}x - \frac{7}{10}x = \frac{2}{5}$ et en étudiant la suite définie par $v_n = x_n - \alpha$, exprimez x_n en fonction de n.

$x_0 = 1$ et $x_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{13}\right)^n$ pour $n \geqslant 1$

Équation différentielle vs équation aux différences

Pour vérifiez si la solution de l'équation aux différences n'est pas très éloignées de la solution théorique, nous allons observer la solution de (E) toutes les 0,1 s : on pose $f_n = f(nT_e)$. Donnez l'expression de f_n.

On s'attend à ce que x_n et y_n soient très proches mais pas égaux. En effet, le passage de (E) à (F) s'opère à l'aide d'une approximation (celle des trapèzes) et non d'une équivalence.

On pose $d_n = f_n - x_n$. À l'aide d'une calculatrice, d'un tableur, de MuPad ou d'une baguette magique quelconque, dressez un tableau où figureront les 20 premiers termes des suites (x_n), (y_n) et (d_n). Cela vous rassure-t-il ?

Montrez que (d_n) est en fait la différence entre deux suites géométriques. Utilisez ce résultat pour confirmer ou infirmer votre conjecture.

Épilogue : les maths, c'est pas Harry Potter

Tout serait donc magique en maths, ou bien n'avez-vous été confronté(e)s toute votre vie qu'à des problèmes truqués ?

Soit (E') l'équation différentielle $2x'(t) - 3x(t) = t$, $x(0) = 2$. Vous pouvez vérifiez que la solution de cette équation est la fonction s définie par

$$x(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{9} + \frac{20}{9}e^{3/2t}$$

. Vous pourrez peut-être un jour montrer que la suite solution de l'équation aux différences associée à (E) est

$$x_n = \frac{20}{9}\left(\frac{43}{37}\right)^n - \frac{1}{30}n - \frac{2}{9}$$

On pose encore $d_n = f_n - x_n$. pouvez-vous conclure comme dans l'exemple précédent ? Moralité ?

Exercice XV-25 **Primitives des puissances de cos et sin**

1) Calculez $\cos x$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix}.
2) Déduisez-en une expression de $\cos^5 x$ comme combinaison linéaire de $\cos(kx)$ avec $k \in [\![0,5]\!]$.
3) Calculez $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^5 t\, dt$