Deuxième Aventure

DÉRIVATION

Résumé Après avoir découvert la notion de limite et son formalisme né au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, notre héros remonte le temps et se retrouve en eaux troubles, entre physique et mathématiques...

A - POURQUOI DÉRIVER ?

A - 1 : L'Anglais et le Continent ou la bataille de la tangente

Nous allons aborder aujourd'hui une notion qui échauffa tant d'esprits qu'elle faillit déclencher une guerre. Replaçons-nous dans le contexte : nous sommes au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, Descartes, Pascal, Fermat, Huygens et d'autres tournent autour de la notion de tangente à une courbe et sentent que ce problème pourrait déboucher sur un bouleversement complet de la science.
Inspirés par ces aînés, Leibniz l'Allemand et Newton l'Anglais vont publier indépendamment l'un de l'autre [1] deux présentations de la dérivée d'une fonction et de son lien avec la tangente à une courbe. Pas entièrement rigoureux car ils utilisent la notion de limite un peu empiriquement sans la démontrer [2], leurs travaux constituent la base de la notion de calcul infinitésimal que vous étudiez au lycée. Qui fut le premier ? Quelle théorie est la meilleure ? Coups bas, insultes ont fusés de part et d'autre de la Mer du Nord pour répondre à ces questions.

A - 1 - a : Newton et la vitesse

Imaginez que , pressé d'aller résoudre quelques exercices de maths, vous roulez un peu trop vite avec votre 309 custom et vous vous faites contrôler à 145 km/h dans le centre de Carquefou : s'agit-il d'une vitesse moyenne ou d'une vitesse instantannée ?
Pour répondre à cette question, parlons d'abord de la vitesse moyenne : pour un mouvement rectiligne, c'est le rapport entre la différence des abscisses et le temps mis pour la parcourir

$$V_{moy} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Pour la vitesse instantanée, on pourrait penser qu'il suffit de prendre un intervalle de temps Δt extrêmement petit : malgré la puissance du moteur de votre 309, sa vitesse ne changera pas beaucoup en, disons, une milliseconde. Mais penser ainsi, c'est raisonner comme un scientifique du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, ou comme un physicien.

$$V(t) \simeq \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{t + \Delta t - t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

pour Δt suffisamment petit. Mais depuis, les mathématiciens ont défini rigoureusement la notion de limite et ils préfèrent dire

$$V(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

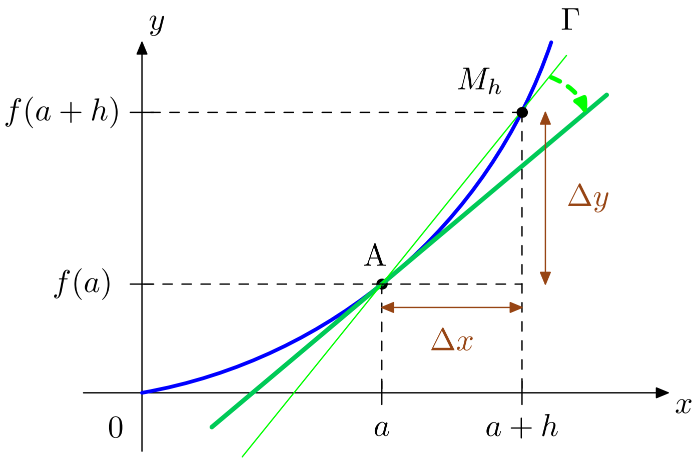
1. Vous savez, il était un temps où les hommes n'avaient pas l'ADSL
2. Il faudra encore attendre deux siècles

Malgré les apparences, ce n'est pas la même chose, car qu'est-ce que veut dire « petit » ? Avez-vous une définition valable ? Une milliseconde, c'est peu pour nous, mais c'est énorme pour un quark qui peut avoir une vie de $10^{-24}s$... En mathématiques, nous préférons la notion «d'aussi petit que l'on veut » qui est plus rigoureuse.

A - 1 - b : Leibniz et la tangente

Comme je vous le disais, le problème de la tangente intrigait les mathématiciens du XVIIème . Fermat avait résolu le problème de la « touchante » comme à son habitude, sur un cas particulier, de manière algébrique et au prix de pas mal de ce qui nous apparaît comme des tours de passe passe (je divises par h et ensuite je suppose que $h = 0$, mais ce genre de magouille hante les traités actuels de mathématiques financières...). Leibniz a eu le mérite d'introduire des notations et des formulations claires.

Une tangente, ou une « touchante » comme disait Fermat, était définie au XVIIème comme une « droite limite » qui ne « toucherait » la courbe localement qu'en un seul point [3].



La pente de la droite (AM_h) vaut

$$p_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{M_h} - y_A}{x_{M_h} - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

L'idée est alors que plus h sera petit, plus la droite (AM_h) se rapprochera de la tangente, et plus p_h se rapprochera de la pente de la tangente.
Pour nous, grands mathématiciens du XXIème siècle, il suffit donc de faire tendre h vers 0 et de prendre la limite de p_h, si elle existe.

$$p = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A - 2 : Qu'est-ce que la dérivée d'une fonction en un point ?

Les deux problèmes que nous venons de voir, ceux de la vitesse instantanée et de la tangente, vous ont convaincu, j'espère, de l'importance fondamentale en mathématiques et en physique de la limite du taux d'accroissement d'une fonction. Il fallait absolument lui donner un nom.

3. Aujourd'hui, la notion de tangente n'est plus uniquement liée à une droite, mais se définit à partir d'une limite

Définition II-1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit a un élément I.
*On dit que **f est dérivable en a** lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée **dérivée de f en a**, et est notée $f'(a)$:*

$$f'(a) = \lim_{x\to a,\, x\neq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

ou encore

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ainsi, la vitesse instantanée $V(t)$ n'est autre que $x'(t)$, la dérivée en t de la fonction position x. Et la pente de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse a est égale à $f'(a)$, la dérivée de f en a.

A - 3 : Comment calculer la dérivée d'une fonction en a ?

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
et calculons $f'(a)$ pour tout réel a.

$$p_h = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

En développant $(a+h)^2$, on a

$$p_h = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

et on en déduit que la dérivée de f existe pour tout réel a et vaut

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} p_h = 2a$$

Incroyable ! On retrouve la formule bien connue !
On peut même s'occuper de la fonction inverse, de la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une composée : je vous laisse vous en occuper à titre d'exercice...

A - 4 : Une fonction continue en a est-elle dérivable en a et vice versa ?

Les travaux de Newton, Leibniz & Co utilisaient des fonctions qui étaient implicitement continues, mais on peut se demander si une fonction dérivable en a est forcément continue en a et ziozerouairaounede.
Vous sentez comme eux que si la fonction n'est pas continue en a, on va avoir du mal à tracer une tangente. Je suppose que vous voulez un contre-exemple...disons, la fonction signe

$$\text{signe} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0, et le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 0, \\ -1/x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

n'a pas de limite ni à gauche, ni à droite de zéro.

Il semblerait donc que si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable en a. Ce qui reviendrait à dire avec un brin de logique[4] que la dérivabilité en a entraîne la continuité en a.

Supposons donc que f soit dérivable en a, alors $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie qu'on note $f'(a)$.
Pour prouver que f est continue en a, il faut prouver que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Nous connaissons $\tau_a(x)$, nous cherchons $f(x)$, nous allons donc exprimer $f(x)$ en fonction de $\tau_a(x)$.
On obtient, pour tout $x \neq a$

$$f(x) = f(a) + (x-a)\tau_a(x)$$

Or $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = f'(a)$ et $\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a}(x-a)\tau_a(x) = 0$ par produit et finalement, par somme des limites on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Propriété II-1 Continuité des fonctions dérivables
Toute fonction dérivable en a est continue en a

Maintenant, que penser de la réciproque : est-ce qu'une fonction continue en a est dérivable en a ? La réponse est bien sûr non, sinon il ne servait à rien d'inventer la dérivabilité.
Je vais vous proposer un contre exemple qui répondra aussi à la question suivante :

A - 5 : Comment interpréter graphiquement la non-dérivabilité de f en a ?

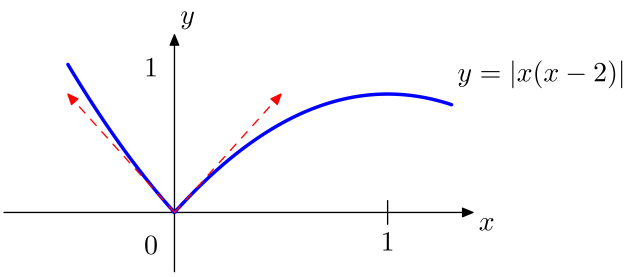
Comme pour la continuité, la dérivabilité est liée à l'existence d'une limite. Trois cas sont donc à étudier.

A - 5 - a : Le taux de variation admet une limite à gauche et une limite à droite distinctes

Voici une fonction qui illustre notre propos et qui sert en même temps de contre-exemple à la question du paragraphe précédent

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x(x-2)| \end{array}$$

et observons la configuration en aile de mouette :



Étudions la dérivabilité de f en 0. Il suffit d'étudier le taux de variation

$$\tau_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x(x-2)|}{x} = \begin{cases} x-2 & \text{si } x>0 \\ 2-x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

4. Il revient au même de dire « A implique B » et « contraire de B implique contraire de A ». À méditer...

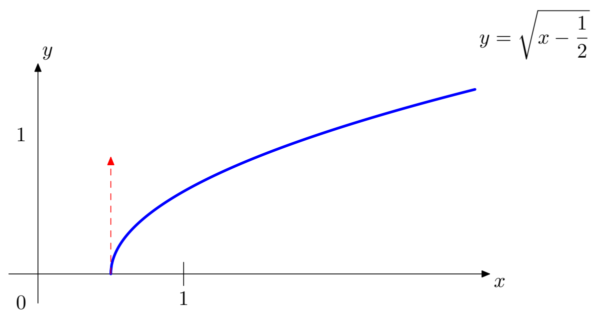
Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \tau_0(x) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \tau_0(x) = 2$: le taux de variation n'admet pas de limite en 0, donc f n'est pas dérivable en 0.

Pourtant, on ne s'arrête pas là, car le fait que des limites existent à gauche et à droite nous permet de dire que f admet **une dérivée à gauche et une dérivée à droite** en 0. Ces dérivées sont les pentes des **demi-tangentes** en 0.

A - 5 - b : Le taux de variation admet une limite infinie en a

Cette fois-ci, étudions la fonction bien connue

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x - \frac{1}{2}} \end{array}$$



$$\tau_{1/2} = \frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = \frac{\sqrt{x - 1/2}}{x - 1/2} = \frac{1}{\sqrt{x - 1/2}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1/2} \tau_{1/2}(x) = +\infty$ et là encore la fonction n'est pas dérivable en $1/2$.

Dans ce cas, la courbe admet au point d'abscisse $1/2$ une tangente verticale : la pente tend en effet vers l'infini.

A - 5 - c : La taux de variation n'admet pas de limite en a

Pour ce cas plus pathologique, nous n'avons pas de contre-exemple à notre portée : il faudrait trouver une fonction continue en a mais dont le taux n'admette pas de limite en a. Mais ces fonctions existent [5] . Vous montrerez même peut-être un jour que « la plupart » des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ne sont dérivables nulle part, mais ceci est une autre histoire...

5. Vous pourrez regarder l'exposé de Denis CHOIMET sur la dérivabilité de la fonction de Riemann $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ à l'adresse `http://denis.choimet.free.fr/exposes/riemann.pdf`

Propriété II-2 Limite du taux de variation et tangente

Pour résumer, en appelant $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$,

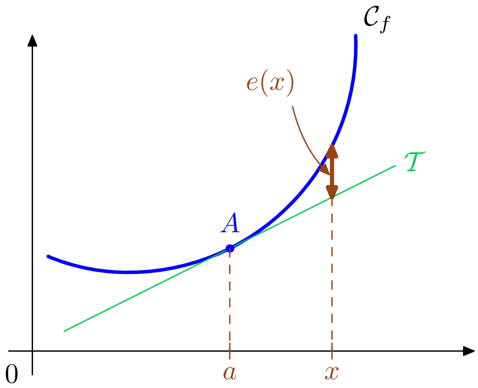
- ▷ *si* $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = \ell$, $\mathcal{C}_f$ *admet la droite de pente* a *et passant par le point de coordonnées* $(a,f(a))$ *comme tangente au point d'abscisse* a*. Une équation de la tangente est donc*

$$y = (x-a)f'(a) + f(a)$$

- ▷ *si* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \tau_a(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \tau_a(x)$, $\mathcal{C}_f$ *admet deux demi-tangentes de pentes les limites à gauche et à droite de* $\tau_a(x)$ *au point d'adscisse* a*;*
- ▷ *si* $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = \infty$, $\mathcal{C}_f$ *admet une tangente verticale au point d'abscisse* a

A - 6 : L'idée fondamentale du calcul différentiel : l'approximation locale des fonctions par des fonctions affines

À l'aide du dessin ci-dessous, essayons d'estimer l'erreur faite en remplaçant $\mathcal{C}_f$ par $\mathcal{T}$ localement au voisinage de a



Pour un x donné, l'erreur vaut

$$e(x) = f(x) - \big(f(a) + (x-a)f'(a)\big)$$

puisque vous connaissez une équation de la tangente $\mathcal{T}$.
Maintenant, abordons une notion que Leibniz n'avait pas su rigoureusement traiter. On « sent » que plus x va se rapprocher de a, plus $e(x)$ sera « petit », mais comment définir ce terme ? Vous vous doutez qu'une fourmi est « petite » par rapport au système solaire mais « grande » par rapport à un quark, donc la notion de $e(x)$ devient petit ne peut nous satisfaire. Alors observons.
En ré-écrivant la relation, on obtient

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{\text{constante}} + \underbrace{(x-a)\times f'(a)}_{\text{de l'ordre de } x-a} + e(x)$$

Il faudrait donc connaître l'ordre de $e(x)$ par rapport à $(x-a)$. Pour cela on étudie leur rapport

$$\lim_{x\to a} \frac{e(x)}{(x-a)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = 0$$

d'après la définition de $f'(a)$ puisqu'on suppose que f est dérivable en a. Donc l'erreur $e(x)$ est « petite » ou plutôt négligeable devant $x-a$ comme nous l'avons défini dans le cours sur les limites. On peut alors écrire

Propriété II-3 Approximation locale d'une courbe par sa tangente

Au voisinage de d'un nombre a où f est dérivable,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)e(x) \quad \textit{avec} \lim_{x\to a} e(x) = 0$$

c'est à dire

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$$

ou encore

$$f(x) \underset{a}{\sim} f(a) + (x-a)f'(a)$$

On peut donc localement approcher une fonction dérivable par une fonction affine, ce qui peut pas mal nous simplifier la vie pour étudier son comportement ou la modéliser.

Considérons par exemple la fonction $f : \begin{array}{rcl} [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$ et étudions la au voisinage de 0. On obtient facilement $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1/2$, donc

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + xe(x) \quad \text{avec} \lim_{x\to 0} e(x) = 0$$

Vérifions par le calcul

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+1/1000} & \simeq & 1{,}000499875 \\ 1+1/2000 & = & 1{,}0005 \end{array}$$

Donc l'erreur commise est de l'ordre de $1{,}25 \times 10^{-7}$, c'est à dire vraiment négligeable devant x qui vaut 10^{-3}.
Cette propriété inspira Euler qui s'en servi pour obtenir un tracé approximatif de solutions d'équations différentielles comme nous le verrons bientôt.

B - DÉRIVÉE ET VARIATIONS DES FONCTIONS

B - 1 : Qu'est-ce qu'une fonction dérivable sur un intervalle ?

C'est bien sûr une fonction qui est dérivable en chacun des points de l'intervalle. On peut alors associer à f une fonction dérivée, qu'on note habituellement f', et qui à chaque x de I associe le nombre dérivée de f en x.
On a bien sûr les mêmes théorèmes généraux sur les combinaisons de fonctions dérivables que pour les fonctions continues, car c'est encore un problème de limites.

B - 2 : Quel est le signe de la dérivée d'une fonction croissante sur une partie de $\mathbb{R}$?

Je vous rappelle la définition d'une fonction croissante sur une partie D

Définition II-2 Fonction croissante sur une partie D

Une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est ***croissante*** *lorsque*

$$\textit{pour tout couple } (x,y) \in D^2 \quad x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

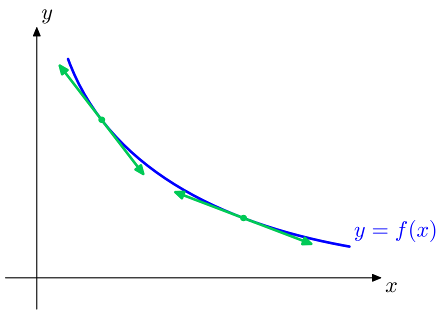
Il est facile de voir que c'est équivalent à

$$\text{pour tout couple } (x,y) \in D^2 \quad x \neq y \Longrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0,$$

ou encore au fait que tous les taux d'accroissements sont positifs ou nuls.
Donc, par un simple passage à la limite, on en déduit que si f est croissante et dérivable, alors f' est positive. Et de même, si f est décroissante et dérivable, alors f' est négative.

B - 3 : Une fonction dont la dérivée est négative est-elle décroissante ?

Nous venons de montrer qu'une fonction croissante sur D a une dérivée positive sur D. Le problème qui nous occupe maintenant est la réciproque.
On pourrait penser que c'est pareil : si par exemple, f est dérivable et f' toujours négative, alors les tangentes au graphe de f ont toutes une pente négative. On doit pouvoir en déduire que f est décroissante.



Mais en faisant cela, nous oublions un détail : il va falloir regarder l'ensemble D sur lequel on travaille de plus près. Par exemple, la fonction inverse $f \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$ a une dérivée $-1/x^2$ toujours négative mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} > 0$
C'est encore une histoire d'intervalle. Une nouvelle fois, retenez bien qu'il est extrêmement important de savoir sur quel ensemble on travaille : pour une même fonction, une propriété vrai sur un ensemble peut être fausse sur un autre.
Pour le cas qui nous intéresse, il nous est impossible à notre niveau de prouver que sur un intervalle notre proposition devient vraie. Nous l'admettrons donc.
Et comme une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante, on en déduit que f est constante si et seulement si $f' = 0$. On peut donc énoncer ce théorème fondamental.

Théorème II-1 Sens de variation et signe de la dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de I vers $\mathbb{R}$. Alors

- *f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.*
- *f est décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$.*
- *f est constante si et seulement si $f' = 0$.*

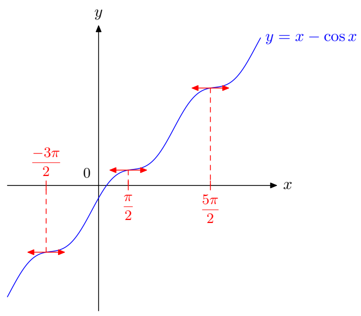
B - 4 : Comment montrer qu'une fonction est strictement croissante ?

D'abord, rappelons la définition

Définition II-3 Fonction strictement croissante sur une partie D
Une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est ***strictement croissante*** *lorsque*

$$\text{pour tout couple } (x,y) \in D^2 \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

On comprend bien qu'il SUFFIT que la dérivée soit strictement croissante pour que ça marche. Mais ce n'est pas NÉCESSAIRE. Considérez en effet la fonction cube qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en 0.
Il y a même pire : des fonctions qui s'annulent une infinité de fois tout en restant strictement croissantes :



En fait, voici le théorème

Théorème II-2 Fonction strictement croissante sur un intervalle
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de I vers $\mathbb{R}$. Alors f est strictement croissante équivaut à : f' est positive ou nulle et il n'existe pas de segment $[a,b]$ de I avec $a < b$ tel que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

En effet, si f est strictement croissante, alors elle est croissante et donc f' est positive, et d'autre part, f' ne peut pas être nulle en tous les points d'un segment $[a,b]$ avec $a < b$ car sinon, f serait constante sur $[a,b]$.

Réciproquement, supposons les conditions sur f' vérifiées et montrons que f est strictement croissante. On se donne deux éléments x et y de I tels que $x < y$. Alors d'une part $f(x) \leqslant f(y)$ car f est croissante puisque $f' \geqslant 0$. Et d'autre part, l'égalité $f(x) = f(y)$ entraînerait que f est constante sur $[x,y]$ compte tenu de la croissance de f, ce qui ne serait possible que si f' était nulle sur $[x,y]$.

B - 5 : À quoi sert la stricte monotonie d'une fonction ?

Rappelez-vous du théorème de la solution unique qu'on appelle aussi théorème de la bijection. Pour l'utiliser, il faut être sûr que notre fonction est strictement monotone. Il faut donc pouvoir le vérifier.
En fait, visuellemnt, il suffira de vérifier sur notre tableau de variation que la « flèche » ne change pas de direction.

Pour les curieux : qu'est-ce qu'une bijection ?
On appelle bijection une application de I sur J telle que tout élément de I admette une image et une seule dans J et que tout elément de J admette un antécédent et un seul dans I. La première partie renvoie à une fonction, la deuxième au théorème de la solution unique.

Quand tout l'ensemble d'arrivée est décrit par les images (quand f(I)=J), on dit que f est *surjective*.
Quand un élément de l'ensemble d'arrivée n'admet qu'un antécédent dans l'ensemble de départ, on dit que f est *injective*. On le vérifie en montrant que $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

Nous consacrerons un chapitre spécial à l'étude des fonctions réciproques au moment de l'étude de nouvelles fonctions : Arcsinus, Arccosinus, Arctangente...

B - 6 : Dérivée de fonctions composées

Comment dériver la fonction $h : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$?
Plus généralement, considérons une fonction g dérivable en x_0 et une fonction f dérivable en $g(x_0)$ qu'on notera $g(x_0) = y_0$.
Alors par définition, les taux $\dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}$ et $\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ admettent tous deux une limite finie quand y tend vers y_0 et quand x tend vers x_0.
Or g est dérivable en x_0, donc en particulier elle y est continue, donc $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$
Donc, par composition des limites, le taux $\dfrac{f[g(x)]-f[g(x_0)]}{x-x_0} = \dfrac{f[g(x)]-f[g(x_0)]}{g(x)-g(x_0)} \times \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ tend vers une limite finie quand x tend vers x_0
Finalement $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f\circ g(x) - f\circ g(x_0)}{x-x_0} = f'\big(g(x_0)\big) \times g'(x_0)$, d'où le théorème

Théorème II-3 Dérivée d'une composée
Si g est dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$ alors la fonction composée $f\circ g$ est dérivable en x_0 et

$$(f\circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \times g'(x_0)$$

Appliquons cette formule à notre exemple.
Comme h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Avec $f(X) = \sqrt{X}$ et $g(x) = 1+x^2$, on obtient $f'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$ et $g'(x) = 2x$, donc

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \times 2x$$

En fait, on dérive comme si $g(x)$ était une variable et on multiplie par la dérivée de « l'intérieur ».
On obtient comme ça tout un tas de formules rappelées dans le tableau de fin de chapitre.

B - 7 : Peut-on étudier les variations d'une fonction sans calculer sa dérivée ?

Grâce au théorème précédent, je réponds oui à la question précédente. En effet, si f et g sont dérivables là où il faut, $(f\circ g)'$ sera du signe du produit des dérivées de f et g. Donc

Théorème II-4 Sens de variation d'une composée
Si g est dérivable sur I et f dérivable sur $g(I)$, alors
- ▷ *La composée de deux fonctions croissantes est croissante*
- ▷ *La composée de deux fonctions décroissante est croissante*
- ▷ *la composée d'une fonction, croissante et d'une fonction décroissante est décroissante*

C'est comme la règle des signes puisque ça en découle !
Par exemple, pour la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc comme la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$ est croissante, f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a juste utilisé que la composée de deux fonctions croissantes est croissante, et que la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

C - DIFFÉRENTIELLE - CALCULS D'ERREUR

C - 1 : Un conflit physico-mathématique...

C'est ici que les torchons brûlent entre physiciens et mathématiciens ! La vision physicienne va apparaître aux yeux des mathématiciens comme une suite d'approximations naïves qui le rend incapable de comprendre le calcul différentiel dans son ensemble, sa cohérence quelque soit la dimension de l'ensemble de départ et d'arrivée, sa nature linéaire, sa simplicité, sa beauté...
Pour le physicien, tout ceci n'est que pédantisme des matheux qui voient peut-être de la simplicité et de la beauté dans le calcul différentiel, mais ils sont bien les seuls !
Comme vous êtes plutôt portés vers la physique, nous étudierons les différentielles du point de vue du physicien, mais, pour le plaisir, nous toucherons un mot plus mathématique.

Définition II-4 Différentielle d'une fonction d'une variable

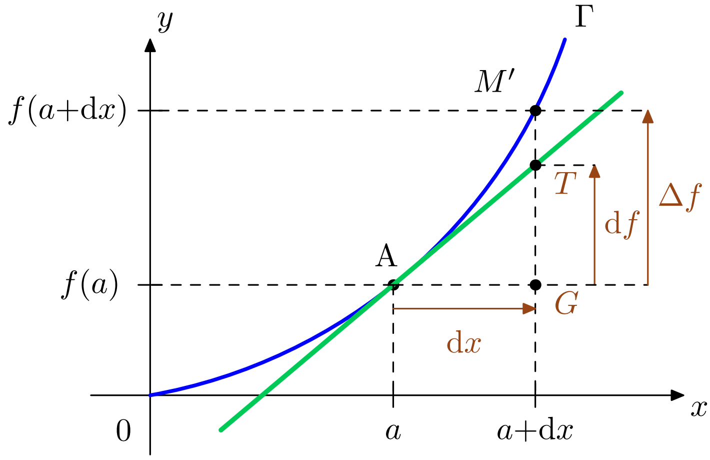
Soit f une fonction dérivable en a. On appelle différentielle de f en a l'application LINÉAIRE

$$h \mapsto h \times f'(a)$$

On (le physicien...) note $df = h \times f'(a)$. Or, si f est la fonction identité, c'est à dire si $f(x) = x$ pour tout réel x, alors $f'(a) = 1$ et donc $\mathrm{d}x = 1 \times h$, et donc

$$\mathrm{d}f = f'(a)\mathrm{d}x$$

C'est un peu tiré par les cheveux...
Reprenons un dessin connu pour mieux voir la situation :



Sachant que le point M a pour coordonnées $(a,f(a))$ et que la tangente (MT) a pour coefficient directeur $f'(a)$, on a

$$y_T - y_G = f'(a)\mathrm{d}x = \mathrm{d}f$$

Continuons à « magouiller ». Appelons $\mathrm{d}x$ (qui pour le mathématicien est une fonction) une petite variation autour de a, $\Delta f = f(a + dx) - f(a)$ et $\mathrm{d}f = f'(a)\mathrm{d}x$ (qui était une fonction et devient une longueur...)

Alors $\Delta f - \mathrm{d}f = e(x)$, l'écart évoqué au début du chapitre et qui est négligeable devant $\mathrm{d}x$. Donc

$$\Delta f \underset{0}{\sim} \mathrm{d}f$$

Ainsi, en physique, pour de « petites » variations, on assimilera $\mathrm{d}f$ et Δf. Cela revient à ce que nous avons fait au paragraphe A-6

C - 2 : En pratique

Pourquoi tout ce pataquès ? Eh bien, vous savez par expérience qu'une formule physique est souvent donnée en fonction d'un produit, d'un quotient, d'une somme de grandeurs. Pour calculer l'erruer commises, il suffira d'utiliser les règles de dérivation

Propriété II-4 Opérations sur les différentielles et application aux calculs d'erreur

$$\begin{array}{lll} \Delta(f+g) & \underset{0}{\sim} & d(f+g) = df + dg \\ \Delta(fg) & \underset{0}{\sim} & d(fg) = f\,dg + g\,df \\ \Delta\left(\dfrac{f}{g}\right) & \underset{0}{\sim} & d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,df - f\,dg}{g^2} \end{array}$$

Un exemple : vous verrez bientôt en physique les oscillations d'un pendule simple dont la période est $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ avec $\ell = 1m$ la longueur du pendule et $g = 9{,}80 m\cdot s^{-2}$ l'accélération de la pesanteur. On veut calculer la variation de T si ℓ varie de $1cm$.
On calcule d'abord l'erreur absolue, à savoir approximativement la différentielle de T.

$$\mathrm{d}T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\mathrm{d}\sqrt{\ell} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{2\sqrt{\ell}}\mathrm{d}\ell = \frac{\pi}{\sqrt{\ell g}}\mathrm{d}\ell$$

On obtient $\mathrm{d}T \simeq 10^{-2}s$

C - 3 : Erreur relative

Le physicien sera plutôt intéressé par l'erreur relative d'un résultat : en effet, l'eereur absolue ne veut pas dire grand chose en elle-même. Une erreur d'un kilo sur un pétrolier c'est peu, sur une maquette de planeur en balsa c'est beaucoup.
On est donc amené à calculer $\dfrac{\delta f}{f}$, c'est à dire $\dfrac{\mathrm{d}f}{f}$. Le « truc », c'est de remarquer que

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \mathrm{d}(\ln f)$$

et donc

Propriété II-5 Dérivée logarithmique et erreur relative

$$\begin{array}{lll} \dfrac{d(fg)}{fg} & = & d(\ln(fg)) = d(\ln f) + d(\ln g) = \dfrac{df}{f} + \dfrac{dg}{g} \\ \dfrac{df^n}{f^n} & = & d(\ln f^n) = d(n\ln f) = n\dfrac{df}{f} \\ \dfrac{d(f/g)}{f/g} & = & d(\ln(f/g)) = d(\ln f - \ln g) = d(\ln f) - d(\ln g) = \dfrac{df}{f} - \dfrac{dg}{g} \end{array}$$

Par exemple, étudions la méthode de Bessel en focométrie (!)

$$f' = \frac{D^2 - \ell^2}{4D}$$

Calculons l'erreur relative $\dfrac{\Delta f'}{f'}$ sur f' en calculant $\left|\dfrac{\mathrm{d}f'}{f'}\right|$

$$\left|\frac{\mathrm{d}f'}{f'}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}(D^2-\ell^2)}{D^2-\ell^2} - \frac{\mathrm{d}(4D)}{4D}\right| = \left|\left(\frac{2D}{D^2-\ell^2} - \frac{1}{D}\right)\mathrm{d}D - \frac{2\ell}{D^2-\ell^2}\mathrm{d}\ell\right|$$

Donc

$$\frac{\Delta f'}{f'} = \left|\frac{2D}{D^2-\ell^2} - \frac{1}{D}\right|\Delta D - \left|\frac{2\ell}{D^2-\ell^2}\right|\Delta \ell$$

AN : $D = 1m$, $\Delta D = 1mm$, $\ell = 30cm$ et $\Delta \ell = 1mm$

Normalement on trouve une erreur relative d'environ 0,18%

D - TABLEAU RÉCAPITULATIF DES DÉRIVÉES

$f(x) =$	$f'(x) =$	**intervalle de validité**
$a \in \mathbb{R}$		
x^n pour $n \in \mathbb{N}$		
$\frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$		
$\sqrt{x}$		
$\ln x$		
$\exp x$		
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$		
$\cos x$		
$\sin x$		
$\tan x$		
$u + v$		
$\lambda u, \ \lambda \in \mathbb{R}$		
uv		
$\frac{u}{v}$		
$u \circ v$		