Huitième Leçon

LOGARITHME NÉPÉRIEN

Résumé Où les mathématiques rejoignent l'alchimie : guidés par la Force, nos héros transforment les produits en somme, créent de nouvelles fonctions. On touche au divin...

A Différentes définitions

Comme souvent en mathématiques, un même objet (ici le logarithme népérien) peut être défini de différentes manières (nous en verrons trois) mais nous aboutirons malgré tout aux mêmes propriétés : le procédé de fabrication change, mais le produit fini est le même.

A 1 Cherchons des fonctions vérifiant f(a x b)=f(a)+ f(b)

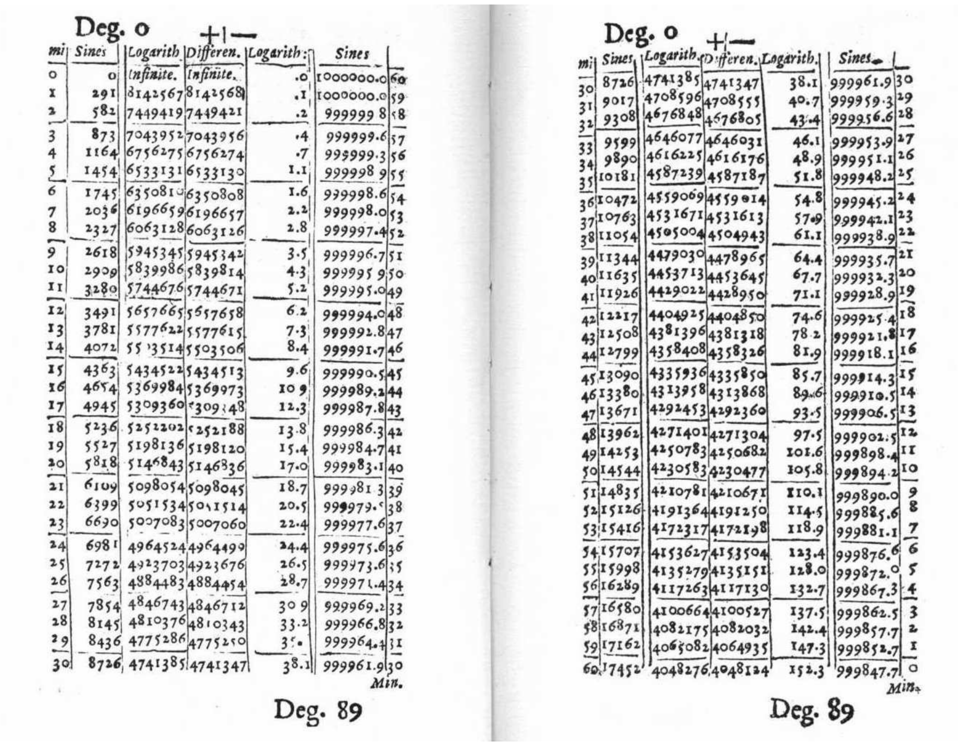
Historiquement, le logarithme népérien a été pour la première fois mis en évidence par l'Écossais John Napier (en français Jean Néper..) au tout début du XVII^e siècle. Afin de faciliter la vie des astronomes, navigateurs, financiers de l'époque qui étaient confrontés à des calculs...astronomiques, John rechercha une fonction qui puisse transformer des produits très compliqués à calculer en sommes plus abordables. Il a donc été amené à résoudre une *équation fonctionnelle*, *i.e.* il a recherché les fonctions f vérifiant $f(a \times b) = f(a) + f(b)$ Il a pu alors établir des Tables de logarithmes, complétées au fil des ans par des potes mathématiciens (nous verrons comment ils ont pu se débrouiller en exercice). À partir de deux nombres a et b, on lit sur les Tables leurs logarithmes $\ln a$ et $\ln b$; on calcule facilement $\ln a + \ln b$ qui est égal à $\ln ab$, puis on cherche sur les Tables le nombre qui admet pour logarithme $\ln ab$ et qui est bien sûr ab.

A 2 Existe-t-il des primitives de $x \mapsto 1/x$?

Autre problème : nous connaissons des primitives des fonctions qui à x associent respectivement x^2, x^1, x^0, x^{-2}, x^{-3}, etc. Vous avez tout de suite remarqué que nous avons oublié quelqu'un : quelles peuvent être les primitives de la fonction qui à x associe $x^{-1} = 1/x$? Une rapide enquête mathématique nous conduit à trouver qu'il s'agit en fait de fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle du copain John. Nous le verifierons là encore en exercice, et c'était l'approche au programme jusqu'à l'année dernière.

A 3 Quelle est la réciproque de la fonction exponentielle ?

Cette année, comme d'habitude, nous roulons pour le nucléaire. Nous avons déjà défini une fonction obéissant à la *loi de décomposition radioactive*, à savoir la fonction exponentielle. Mais de nouveaux problèmes se posent au moment de construire de nouvelles centrales : dans combien de milliards d'années les habitants de Tchernobyl ne risqueront plus d'attraper un cancer de la thyroïde en ingérant les légumes irradiés de leurs potagers. Le Physicien est alors amené à résoudre une équation d'inconnue y du type $e^y = 32$ Quel est donc ce y dont l'exponentielle vaut 32 ? Fabrice Couenne, célèbre physicien du XXI^e siècle, vous a déjà donné la réponse : on l'appelle $\ln 32$.
Voici un extrait des tables de logarithmes publiées au début du XVII^e siècle par John Napier himself :



Deg. 0 + | —

mi	Sines	Logarith	Differen.	Logarith:	Sines	
0	0	Infinite.	Infinite.	.0	1000000.0	60
1	291	8142567	8142568	.1	1000000.0	59
2	582	7449419	7449421	.2	999999 8	58
3	873	7043952	7043956	.4	999999.6	57
4	1164	6756275	6756274	.7	999999.3	56
5	1454	6533131	6533130	1.1	999998 9	55
6	1745	6350810	6350808	1.6	999998.6	54
7	2036	6196659	6196657	2.2	999998.0	53
8	2327	6063128	6063126	2.8	999997.4	52
9	2618	5945345	5945342	3.5	999996.7	51
10	2909	5839986	5839814	4.3	999995 9	50
11	3280	5744676	5744671	5.2	999995.0	49
12	3491	5657665	5657658	6.2	999994.0	48
13	3781	5577622	5577615	7.3	999992.8	47
14	4072	55[illegible]3514	5503506	8.4	999991.7	46
15	4363	5434522	5434513	9.6	999990.5	45
16	4654	5369984	5369973	10 9	999989.2	44
17	4945	5309360	[illegible]309[illegible]48	12.3	999987.8	43
18	5236	5252202	5252188	13.8	999986.3	42
19	5527	5198136	5198120	15.4	999984.7	41
20	5818	5146843	5146836	17.0	999983.1	40
21	6109	5098054	5098045	18.7	999981 3	39
22	6399	5051534	5051514	20.5	999979.[illegible]	38
23	6690	5007083	5007060	22.4	999977.6	37
24	6981	4964524	4964499	24.4	999975.6	36
25	7272	4923703	4923676	26.5	999973.6	35
26	7563	4884483	4884454	28.7	999971.4	34
27	7854	4846743	4846712	30 9	999969.2	33
28	8145	4810376	4810343	33.2	999966.8	32
29	8436	4775286	4775250	35.[illegible]	999964.4	31
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
						Min.

Deg. 89

Deg. 0 + | —

mi	Sines	Logarith.	Differen.	Logarith.	Sines	
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
31	9017	4708596	4708555	40.7	999959.3	29
32	9308	4676848	4676805	43.4	999956.6	28
33	9599	4646077	4646031	46.1	999953.9	27
34	9890	4616225	4616176	48.9	999951.1	26
35	10181	4587239	4587187	51.8	999948.2	25
36	10472	4559069	4559014	54.8	999945.2	24
37	10763	4531671	4531613	57.9	999942.1	23
38	11054	4505004	4504943	61.1	999938.9	22
39	11344	4479030	4478965	64.4	999935.7	21
40	11635	4453713	4453645	67.7	999932.3	20
41	11926	4429022	4428950	71.1	999928.9	19
42	12217	4404925	4404850	74.6	999925.4	18
43	12508	4381396	4381318	78.2	999921.8	17
44	12799	4358408	4358326	81.9	999918.1	16
45	13090	4335936	4335850	85.7	999914.3	15
46	13380	4313958	4313868	89.6	999910.5	14
47	13671	4292453	4292360	93.5	999906.5	13
48	13962	4271401	4271304	97.5	999902.5	12
49	14253	4250783	4250682	101.6	999898.4	11
50	14544	4230583	4230477	105.8	999894.2	10
51	14835	4210781	4210671	110.1	999890.0	9
52	15126	4191364	4191250	114.5	999885.6	8
53	15416	4172317	4172198	118.9	999881.1	7
54	15707	4153627	4153504	123.4	999876.6	6
55	15998	4135279	4135151	128.0	999872.0	5
56	16289	4117263	4117130	132.7	999867.3	4
57	16580	4100664	4100527	137.5	999862.5	3
58	16871	4082175	4082032	142.4	999857.7	2
59	17162	4065082	4064935	147.3	999852.7	1
60	17452	4048276	4048124	152.3	999847.7	0
						Min.

Deg. 89

B Construisons le logarithme

Mathémator : Aujourd'hui, cher disciple, nous allons construire pas à pas une nouvelle fonction pour combler d'horribles trous noirs de l'univers, car nous allons enfin donner une primitive à la fonction inverse, une réciproque à la fonction exponentielle, une solution à l'équation fonctionnelle $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Comme l'a déjà fait un collègue à partir de la côte d'Adam, tels des dieux de l'esprit, nous allons créer de nouveaux êtres à partir de la solitaire fonction exponentielle !

Téhessin (à part) : *Je me demande des fois si un bon coup de sabre laser sur la tête...**tout haut** Que la Force de l'Esprit soit avec nous !*

Mathémator : Vous avez déjà fait le lien entre la primitive de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 et les fonctions qui « transforment les produits en somme ». Mais les maîtres de l'Empire ont choisi une troisième voie, la fonction exponentielle, que nous allons relier aux deux premières.
Premier problème : la fonction exponentielle admet-elle une réciproque ? Et d'abord, qu'est-ce que la réciproque d'une fonction ?

Téhessin : Si une fonction f envoie un nombre x vers un nombre y, sa réciproque f^{-1} permet de renvoyer y vers x.

Mathémator : Pouvez-vous me donner un exemple ?

Téhessin : La fonction carrée envoie 2 vers 4 et la fonction racine carrée renvoie 4 vers 2.

Mathémator : Pour reprendre votre exemple, tout nombre réel admet un et un seul carré, donc la « transformation » $x \mapsto x^2$ est bien une fonction sur $\mathbb{R}$. Mais il y a des problèmes pour revenir en arrière : certains nombres sont les carrés de deux réels comme 4, d'un seul comme 0 ou même d'aucun comme -32. On ne peut donc pas toujours définir une fonction « retour » : n'oubliez pas en effet que par définition, une fonction numérique fait correspondre à un réel de l'ensemble de définition un UNIQUE réel.
En fait, on a cherché à résoudre une équation d'inconnue x du type $x^2 = a$ qui peut admettre selon la valeur de a deux, une, voire aucune solution réelle.
Connaissez-vous un moyen de s'assurer qu'une équation du type $f(x) = a$ admet une unique solution sur un ensemble donné ?

Téhessin : Vous me prenez pour un rigolo : le théorème de LA valeur intermédiaire bien sûr !

Mathémator : J'ai du mal à réaliser à quel point la Force est en vous. Vous allez donc pouvoir relier tout ceci à la fonction exponentielle.

Téhessin : La fonction exponentielle est *continue* et *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$.
Donc, pour tout réel *a strictement positif*, l'équation $\exp(x) = a$ admet une unique solution réelle.

Mathémator : Si je résume, à tout réel *strictement positif* x on peut associer un *unique* réel y tel que $x = \exp(y)$. On notera ce réel $\ln x$ (logarithme népérien de x) et nous pouvons maintenant énoncer :

Théorème IX - 1 : définition du logarithme népérien

La fonction exponentielle admet une fonction réciproque défine sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelée fonction logarithme népérien. On note $\ln x$ l'image d'un réel strictement positif par cette fonction. Alors,

$$\text{pour tout } x > 0,\ e^{\ln x} = x \quad \text{et} \quad \text{pour tout réel } x,\ \ln e^x = x$$

Téhessin : Je ne vois toujours pas le lien avec les primitives de la fonction inverse et l'équation fonctionnelle.

Mathémator : Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, nous admettrons cette année que sa réciproque est dérivable. Donc ln est dérivable sur $]0,+\infty[$. Notons provisoirement $\ln'$ sa dérivée. Nous savons juste que $\exp(\ln x) = x$. Essayez d'en déduire une expression de $\ln' x$.

Téhessin : Pour obtenir $\ln'$, il faudrait dériver quelque chose. Or nous n'avons qu'une relation à nous mettre sous la dent, donc je vais dériver chaque membre de l'égalité $\exp(\ln x) = x$.
J'obtiens $\ln' x \times \exp(\ln x) = 1$ et donc $\ln' x = 1/x$...Bingo ! Le lien est fait : ln est une primitive de la fonction inverse.

Mathémator : Pas si vite mon petit Téhessix. Nous avions considéré lors de notre échauffement LA primitive de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ *qui s'annule en 1*. Pouvez-vous me confirmer que $\ln 1 = 0$?

Téhessin : Sur la machine oui, mais je ne vois pas comment calculer une valeur particulière d'une fonction dont on ne connait rien.

Mathémator : Ou plutôt pas grand chose, mais c'est suffisant. Utilisez la seule relation que vous connaissiez en introduisant 1.

Téhessin : Si vous le dîtes. Alors $\exp(\ln 1) = 1$...

Mathémator : Donc $\exp(\ln 1) = \exp(0)$, or la fonction exponentielle est une bijection car elle est continue et strictement croissante.

Téhessin : Bijection, qu'est-ce que ça veut dire ?

Mathémator : Ça veut dire en particulier que $f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x = y$, donc ici $\exp(\ln 1) = \exp(0) \Longleftrightarrow \ln 1 = 0$.

Téhessin : Cette fois-ci on peut relier la fonction ln à la fonction inverse et à l'équation fonctionnelle. J'ose même vous devancer en énonçant les propriétés.

Propriété IX - 1 : sens de variation

La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\ln'(x) = 1/x$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
On en déduit que la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Propriété IX - 2 : relation fondamentale

Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$, on a

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

De plus

$$\ln 1 = 0$$

Mathémator : Cette dernière propriété va vous permettre, pendant vos temps libres, de mettre en évidence quelques autres résultats bien pratiques :

Propriété IX - 3 : propriétés algébriques

$$\ln(1/a) = -\ln a \qquad \ln(a/b) = \ln a - \ln b \qquad \ln a^p = p \ln a \quad \text{avec } p \in \mathbb{Q}$$

Occupons-nous maintenant des propriétés analytiques du logarithme, en particulier, allons voir ce qui se passe à l'infini.

Mais nous avons beaucoup réfléchi, alors je vous propose un petit jeu sous forme d'énigme pour nous détendre : un cloporte se promène sur le graphe de la fonction ln tracé dans un repère orthonormé d'unité le centimètre. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une hauteur de 30 cm sachant que sa vitesse est de $1 cm.s^{-1}$?

Téhessin (à part) : *Voilà un gars qui sait s'amuser !* ***tout haut :*** *euh...quel jeu distrayant, maître ! Voyons, le problème revient à résoudre l'équation* $\ln x = 30$, *c'est à dire* $x = e^{30}$, *ce qui donne environ 107 millions de kilomètres. Il lui faudra donc à peu près 3386 siècles sans compter ses pauses-jeu.*

Mathémator : Ah, ah, ah, cette blague me fera toujours rire.

Téhessin (à part) : *Pauvre homme...*

Mathémator : Bon, fini de rire. Vous vous rendez compte que la fonction ln n'est pas bien vaillante.

Téhessin : En fait, je l'imagine mal monter vers l'infini et au-delà.

Mathémator : Résumons-nous : nous savons que ln est strictement croissante, donc que peut-on dire de son comportement asymptotique, c'est à dire à l'infini ?

Téhessin : Vous m'avez déjà mis en garde à ce sujet : si ln est bornée, alors elle admet une limite finie, sinon elle tend vers $+\infty$. Le problème revient donc à savoir si ln est bornée sur $]0,+\infty[$.

Mathémator : Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $\ln x < A$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Cela voudrait dire que $x < e^A$ pour tout $x > 0$ ce qui est pour le moins absurde ! Il suffit de choisir $x = e^A + 32$. Ainsi ln n'est pas bornée et donc

Propriété IX - 4 : limite à l'infini

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Occupons-nous maintenant de ce qui se passe du côté de l'autre borne de l'ensemble de définition, au voisinage de zéro. Il n'y a pratiquement rien à faire connaissant les propriétés algébriques de ln et en vous inspirant de ce que nous avions fait pour déduire la limite en $-\infty$ de exp connaissant sa limite en $+\infty$.

Téhessin : Ben si x tend vers 0, alors $1/x$ tend vers $+\infty$ et $\ln(1/x) = -\ln x$. En fait, si on remet tout dans l'ordre

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} 1/x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln(1/x) = +\infty$$

Or $\ln(1/x) = -\ln x$, donc finalement

Propriété IX - 5 : limite en zéro

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

Mathémator : Très bien. Il ne reste plus qu'à régler un dernier détail : ln croît vers $+\infty$, certes, mais très, très lentement. À votre avis, que se passe-t-il au voisinage de $+\infty$ pour $\dfrac{\ln x}{x}$?

Téhessin : La fonction ln ne va pas peser grand chose face aux fonctions monômes : le rapport va sûrement tendre vers zéro.

Mathémator : Votre intuition est bonne. Il suffit en fait d'étudier la fonction $\varphi : x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$ pour conclure que

Propriété IX - 6 : croissance comparée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Téhessin : Vous parlez de mon intuition, mais un détail me turlupine : la dérivée de ln tend vers 0 en $+\infty$. J'aurai donc envie de dire que ln se « stabilise » à l'infini puisque sa pente tend vers zéro : elle devrait donc être majorée à linfini, pourtant nous avons montré qu'elle ne l'était pas.

Mathémator : Encore une fois, vous m'impressionez Téhessin. En effet, nous aurions tendance à penser qu'une fonction f vérifiant $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ admette une asymptote horizontale. Malheureusement, les outils permettant de vous prouver que ce n'est pas toujours vrai ne sont plus au programme de Terminale, donc patience... Néanmoins, retenez que des conjectures qui paraissent évidentes peuvent s'avérer fausses lorsqu'on se trouve trop près de l'infini.

Téhessin : Après ces paroles, mon cours de philo va me paraître bien fade...

C Construction du graphe avec la méthode d'Euler

Construisons une approximation du graphe de ln sachant que la dérivée de ln est la fonction inverse et que $\ln 1 = 0$
Rappelons brièvement le principe de la méthode.
On utilise le fait que $\frac{1}{x} = f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Alors

$$f(x+h) \approx h \cdot \frac{1}{x} + f(x)$$

La traduction algorithmique est alors directe.

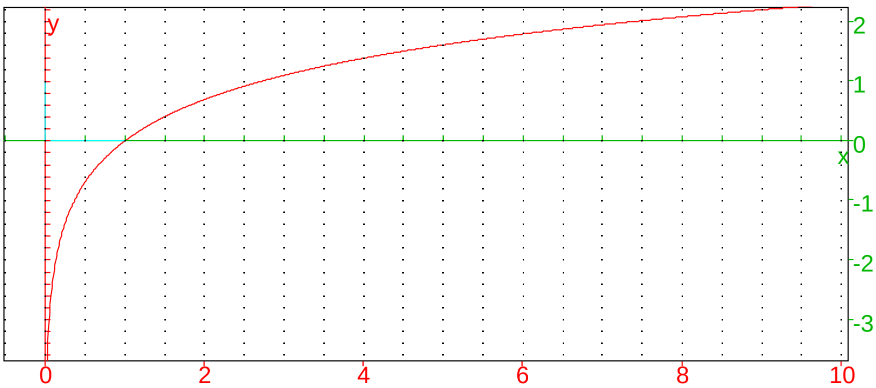
```
EulerLn(x,y,xlimite,h,liste_points):={
if(h>=0)then{condition:=x>=xlimite}else{condition:=x<=xlimite}
if(condition)
   then{liste_points}
   else{ EulerLn(x+h,y+h/x,xlimite,h,[op(liste_points),[x,y]])}
}:;
```

Puis pour le tracé :

```
trace_EulerLn(xo,yo,xlimite,h):={
polygonplot([EulerLn(xo,yo,xlimite,h,[])])
}:;
```

Ce qui donne pour le tracé sur $[0,01\,;\,10]$:

```
trace_EulerLn(1,0,10,0.01),trace_EulerLn(1,0,0.01,-0.01)
```



D Exercices sur la définition des logarithmes

Exercice IX - 1

Oublions tout ce que nous savons sur la fonction ln. Appelons L la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui prend la valeur 0 en 1. Notre but est de démontrer que L vérifie l'équation fonctionnelle de John.
Pour cela nous allons introduire un réel $a > 0$ et la fonction $f\ :\ x \mapsto \mathrm{L}(ax)$ définie sur $]0,+\infty[$

1. Montrez que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculez $f'(x)$ en fonction de x.
2. Déduisez zan qu'il existe un réel k tel que pour tout $x>0$, $f(x)=\mathrm{L}(x)+k$.
3. Montrez finalement que pour tout $x>0$, $\mathrm{L}(ax)=\mathrm{L}(a)+\mathrm{L}(x)$.

Exercice IX - 2 Le problème de John

Nous allons rechercher les fonctions f telles que
- f est dérivable sur $]0,+\infty[$
- $f'(1)=1$
- pour tous réels $a>0$ et $b>0$, $f(ab)=f(a)+f(b)$

1. Calculez $f(1)$.
2. Soit $a>0$ un réel fixé. On définit sur $]0,+\infty[$ la fonction
$$g_a\ :\ x\mapsto g_a(x)=f(ax)-f(x)$$
Montrez que g_a est constante.
3. Montrez que g_a est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculez $g_a'(x)$.
4. Il ne vous reste plus qu'à remarquer que $g_a'(1)=af'(a)-f'(1)$ pour en déduire que f est la primitive de $x\mapsto 1/x$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice IX - 3

En utilisant uniquement les résultats $\ln 2\approx 0,693$ et $\ln 5\approx 1,610$, donnez une valeur approchée de
1. $\ln 2,5$
2. $\ln 125$
3. $\ln 0,2$
4. $\ln\dfrac{225}{8}$
5. 4×5 sachant que vous ne savez plus vos tables de multiplications.

E Croissances comparées

Exercice IX - 4 Logarithme et puissance

Soit $\alpha\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $x\in]0,+\infty[$. On pose $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$.

1. a) En posant $\mathrm{X}=x^\alpha$, montrez que $f(x)=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln \mathrm{X}}{\mathrm{X}}$.
   b) Déduisez-en que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$.
2. Soit $g(x)=x^\alpha\ln x$
   a) En posant $\mathrm{X}=1/x$, exprimez $g(x)$ en fonction de X et α.
   b) Qu'en déduisez-vous d'intéressant ?

Exercice IX - 5 Exponentielle et puissance

On pose $\varphi(x)=e^x/x^\alpha$.

1. a) Montrez que $\varphi(x)=e^{x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$
   b) Déduisez-en $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$
2. On pose $\psi(x)=x^\alpha e^{-x}$
   a) Démontrez que $\psi(x)=e^{-x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$
   b) Qu'en déduisez-vous d'intéressant ?

Propriété IX - 7 : croissances comparées (suite)

Pour tout entier naturel n non nul

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

F Puissance réelle d'un réel

Définition IX - 1 : puissance réelle

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b \ln a}$

Exercice IX - 6

Étudiez les fonctions $f_\alpha \ : \ x \mapsto x^\alpha$

Exercice IX - 7

Étudiez la fonction $\varphi \ : \ x \mapsto 2^x$.

Exercice IX - 8

Soient α et β deux réels. Étudiez $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{1+n^\beta}$.

Discutez selon le signe de β, puis selon celui de α

G Exercices divers

Exercice IX - 9 Bac avec ROC

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat de cours suivant :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

On rappelle la définition et le théorème suivants :
Définition : *Soit f une fonction définie sur l'intervalle* $[\mathrm{A}, +\infty[$*, où A est un réel positif, et soit L un nombre réel.*
Dire que la fonction f a pour limite L en $+\infty$ *signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient tous les nombres f(x) pour x assez grand*
Théorème : *Soit L un nombre réel, f, g et h des fonctions définies sur l'intervalle* $[\mathrm{A}, +\infty[$*, où A est un réel positif. Si f, g et h vérifient les conditions suivantes :*
– *Pour tout x appartenant à* $[\mathrm{A}, +\infty[$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$;
– *Les fonctions f et h ont pour limite L en* $+\infty$
alors la fonction f a pour limite L en $+\infty$

1. **Démonstration de cours :** en utilisant la définition précédente, démontrer le théorème énoncé ci-dessus.
2. **Application :** après avoir étudié la fonction $x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$, démontrez le résultat anoncé en préambule.

Exercice IX - 10 Bac

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle
$]0 ; +\infty[$.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[$.
On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel
n, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b) Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

c) Préciser la valeur de α_1.

d) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

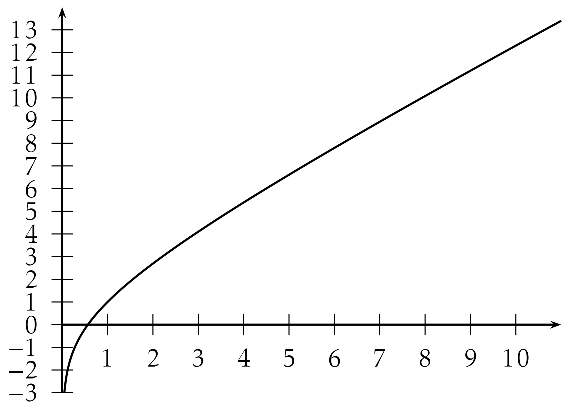
b) Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$h(x) = \ln x - x + 1.$$

En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

c) Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.

4. Déterminer la limite de la suite (α_n).



Exercice IX - 11 Bac

I. Première partie
On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0 ; +\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

II. Deuxième partie
On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}$.
À l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n.$$

4. Caiculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.
5. Étude de la convergence de la suite (u_n).
   a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
   b) En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.
   c) On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout n entier naturel, alors
   $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
   Montrer alors que $\frac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.

Exercice IX - 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n est $1+\mathrm{E}(\log n)$ où log représente le logarithme décimal et $\mathrm{E}(x)$ la partie entière d'un réel x.

Encadrez n par deux puissances successives de 10

Exercice IX - 13

Résolvez dans $]0,+\infty[$ l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Exercice IX - 14

Étudiez et représentez graphiquement la fonction $x \mapsto \ln\left(\ln^2(x^2)\right)$.
Vous éviterez un gros calcul de dérivée.

Exercice IX - 15

Calculez les dérivées des fonctions définies par

1. $a(x) = \ln(\ln x)$
2. $b(x) = \ln(\ln(\ln(\ln x)))$
3. $c(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice IX - 16

Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ de

$$a)\ f_1(x) = x^{1/x}\quad b)\ f_2(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\quad c)\ f_3(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}\quad d)\ f_4(x) = \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}.$$

Pour b) posez t=1/x ; pour c), décomposez l'exposant de e à l'aide d'expressions du type ln t/t

Exercice IX - 17

Étudier les limites quand x tend vers 0^+ de

$$a)\ g_1(x) = x^x \qquad b)\ g_2(x) = (x^x)^x \qquad c)\ g_3(x) = x^{(x^x)}$$

$$d)\ g_4(x) = (-\ln x)^x \qquad e)\ g_5(x) = x^2 e^{1/x}.$$

d) posez $t = -\ln x$; e) $t=1/x$

Exercice IX - 18

On pose $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

1. Déterminez l'ensemble de définition de f et étudiez sa parité.
2. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \ln x$
3. Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative dans un bon repère.

Exercice IX - 19

Soit $\varphi\ :\ u \mapsto u\ln u$. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ? La fonction $\tilde{\varphi}$ ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ? Étudiez $\tilde{\varphi}$ et tracez sa représentation graphique.

Exercice IX - 20 Logarithme complexe

Soit z appartenant à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. On définit une fonction Loc qu'on appelle logarithme complexe par

$$\mathrm{Loc}(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$

Montrez que la fonction Loc vérifie les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln. Montrez qu'elle admet une fonction réciproque que vous déterminerez.

Exercice IX - 21

Calculez $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x^2/2+1/2)}{x-1}$

H Retour sur les primitives

Complétez le tableau suivant

f	Je pose $u =$	Alors $u' =$	Forme de f en fonction de u et u'	Une primitive de f est
$\dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$				
$\dfrac{\cos(2x)}{(3+\sin(2x))^3}$				
$\dfrac{(\ln x)^2}{x}$				
$x\sqrt{x^2-1}$				
$16\dfrac{e^x}{1+2e^x}$				

f	Je pose $u =$	Alors $u' =$	Forme de f en fonction de u et u'	Une primitive de f est
$\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$				
$\dfrac{1}{x\ln x}$				
$\dfrac{e^x}{(2+e^x)^3}$				
$xe^{-x^2/2}$				
$\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$				
$\cos(x)\sin^5(x)$				

I Un beau problème utilisant les primitives

La partie A est indépendante de partie B et C.

A - Recherche d'une primitive

Le but de la partie est de trouver une fonction définie et dérivable sur $]-1,1[$ telle que $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$ (1)

1. *Analyse* : supposons qu'il existe une telle fonction.
   a) Montrez que (1) $\Longleftrightarrow (1-x)f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$
   b) Déterminez une primitive F_1 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $]-1,1[$
   c) Montrez que $(1-x)f'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{1-x^2}$
   d) Déduisez-en une autre primitive F_2 de $x \mapsto (1-x)f'(x)$ sur $]-1,1[$ en fonction de f.
   e) Déduisez de b) et c) l'expression de f en fonction de x.
2. *Synthèse* : vérifiez que la solution trouvée satisfait les conditions.

B - Étude de la fonction tangente hyperbolique

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Montrez que φ est dérivable et calculez φ'. Déduisez-en le sens de variation de φ.
2. Étudiez limites et asymptotes aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Dressez le tableau de variation de φ.
4. Vérifiez que $\varphi' = 1 - \varphi^2$.
5. Déterminez une équation de la tangente à $\mathcal{C}_\varphi$ au point d'abscisse 0.

6. Montrez que $\varphi(a+b) = \dfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1+\varphi(a).\varphi(b)}$.
7. Tracé de $\mathcal{C}_\varphi$, des asymptotes et de la tangente dans le repère qui va bien.

C - Fonction argument tangente hyperbolique

1. *Définition de la fonction*
   a) Montrez que $\varphi(x) = t$ admet une unique solution pour tout $t \in]-1,1[$.
   b) Montrez que $x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t}{1-t}$
2. *Étude de la fonction*
   On pose $g\ :\ ]-1,1[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
   a) Montrez que g est dérivable et calculez $g'(x)$.
   b) Déduisez-en les variations de g.
   c) Déterminez une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'affixe 0.
   d) Déterminez limites et asymptotes aux bornes de l'ensemble de définition de g.
   e) Dressez le tableau de variation de g.
   f) Tracez $\mathcal{C}_g$, les asymptotes et la tangentes sur le même graphique qu'à la question B)7).

J Échelles semi-logarithmiques

Exercice IX - 22 Un petit préambule : logarithme décimal

Définition IX - 2 : logarithme décimal

La fonction log $:\ x\mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ définie pour $x>0$ est appelée **fonction logarithme décimal**

Étudiez brièvement cette fonction et mettez en évidence ses principales propriétés algébriques.
On considère un repère où l'axe des abscisses est gradué comme d'habitude et où l'axe des ordonnées est gradué en échelle logarithmique, c'est à dire qu'une unité étant choisie, la $k-ime$ unité correspond à une ordonnée de 10^k.
Représentez dans un tel repère les fonctions suivantes :

1. $f_1\ :\ x\mapsto 10^x$
2. $f_2\ :\ x\mapsto 32\times 10^x$
3. $f_3\ :\ x\mapsto 0,32\times 10^x$
4. $f_4\ :\ x\mapsto e^x$
5. $f_5\ :\ x\mapsto e^{-32x}$

Exercice IX - 23 Décibels

Définition

Si G est une grandeur et G′ une nouvelle grandeur, les nombres $G'-G$ ou G'/G ou $G'-G/G$ peuvent être trop grands ou trop petits pour être interprétés. On utilise alors une échelle logarithmique (de base 10). En supposant G et G′ strictement positifs, on calcule ainsi $\log_{10}\frac{G'}{G}$ et le résultat est exprimé en **Bel**. On utilise plus couramment $10\log_{10}\frac{G'}{G}$ qui est exprimé en **décibel** si G et G′ sont des grandeurs utilisées en acoustique, électronique, télécommunications (Bel vient de Graham Bell, l'inventeur du téléphone).
Si $\log_{10}\frac{G'}{G}$ est positif, on parle de gain et sinon d'atténuation ou de perte.

Attention aux vendeurs de lave-vaisselle ou d'aéroports !

Soit P_0 la puissance fournie à l'entrée d'un appareillage et P_1 la puissance de sortie.

1. On vous dit que l'atténuation de la puissance est de 3 dB. Que peut-on en déduire pour P_1/P_0 ?
2. Que dire du gain en décibels si $P_1/P_0 = 10$? $= 100$? $= 200$?

Exercice IX - 24 Un peu de chimie : $p\mathrm{H}$ et $p\mathrm{K_A}$

Dans l'eau de Javel, il y a de l'acide hypochloreux $HC\ell O$ associé à sa base, l'ion hypochlorite $C\ell O^-$: je ne vous apprends rien. Je vous rappelle, mais vous connaissez ça par cœur que $p\mathrm{H}$ et $p\mathrm{K_A}$ sont liés par la relation

$$p\mathrm{H} = p\mathrm{K_A} + \log_{10}\frac{[\text{Base}]}{[\text{Acide}]}$$

Étudiez la fonction α qui au $p\mathrm{H}$ associe le rapport $\frac{[\text{Base}]}{[\text{Acide}]}$ ainsi que la fonction β qui au $p\mathrm{H}$ associe le rapport $\frac{[\text{Acide}]}{[\text{Base}]}$ sachant que le $p\mathrm{K_A}$ de notre couple vaut 7,3.
Tracez les représentations de ces deux fonctions sur un même graphique et interprétez chimiquement.

Exercice IX - 25 Fonctions de transfert en électronique

Un circuit peut être caractérisé par sa fonction de transfert T dépendant de la pulsation ω de la tension sinusoïdale. On s'intéresse souvent à la courbe de gain associée représentant la fonction

$$\mathrm{G} : \omega \mapsto 20\log|\mathrm{T}(\omega)|$$

où le gain G est exprimé en décibels.
Par commodité, l'axe des ordonnées est gradué en échelle décimale, et l'axe des abscisses ω est gradué en échelle log.

1. **Un exemple** Représentons la courbe de gain de la fonction

$$\mathrm{T}_1 : \omega \mapsto j\frac{\omega}{\omega_0}$$

Tout d'abord, rappelez-vous qu'en électronique, j représente le nombre de carré -1.
$\mathrm{G}_1(\omega) = 20\log|\mathrm{T}_1(\omega)| = 20\log\omega - 20\log\omega_0$. L'axe des abscisses étant gradué en échelle log, on pose $x = \log\omega$, alors le gain est représenté par la courbe d'équation

$$y = 20x - 20\log\omega_0$$

qui est donc une droite qu'on notera dans la suite du problème $(\mathcal{D})$. On dit que sa pente est de 20 décibels par décade.
Pour la tracer, on peut déterminer les coordonnées de deux points :
– pour $\omega = \omega_0$, $\mathrm{G}_1(\omega) = 20\log 1 = 0$
– pour $\omega = 10\omega_0$, $\mathrm{G}_1(\omega) = 20\log 10 = 20$

2. On va s'intéresser maintenant à la fonction

$$\mathrm{T}_2 : \omega \mapsto 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$$

a) Regardez ce qui se passe au voisinage de 0, c'est à dire étudiez la limite de G_2 lorsque ω tend vers 0 et interprétez graphiquement.

b) Que sentez-vous au voisinage de $+\infty$? Montrez que $(\mathcal{D})$ est asymptote à la courbe représentative de G_2 au voisinage de $+\infty$.

3. Essayez de vous débrouillez avec

$$\mathrm{T}_3 : \omega \mapsto \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

(ya une ruse...)

Exercice IX - 26 Étude du pont de Wien

Il s'agit d'un circuit obtenu en plaçant en séries deux filtres F_1 et F_2, F_1 étant un filtre R-C série et F_2 un filtre R-C en parallèle. Les deux resistances sont identiques et les deux condensateurs aussi. L'entrée est une tension $e(t)$ de pulsation ω, la sortie étudiée est la tension aux bornes de la résistance placée dans le filtre F_2.
Dans tout le problème, on posa $\tau = RC$ et la fonction de transfert est notée $T(j\omega)$, avec $j^2 = -1$.
Vous verrez peut-être un jour que la notion de pont diviseur permet d'obtenir que

$$T(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{j^2\tau^2\omega^2 + 3j\omega\tau + 1}$$

1. Commencez par faire le schéma du circuit pour faire savant.
2. On pose à présent $x = \omega\tau$
   a) Montrez que
   $$|T(j\omega)| = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}$$
   On posera par la suite, pour simplifiez encore nos notations (qui deviennent aussi nombreuses que les personnages dans un roman russe)
   $$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}$$
   b) Calculez et écrivez sous la forme la plus simple possible la dérivée de f par rapport à x.
3. La fonction de gain normalisée est définie par
   $$G(x) = 20 \log |f(x)|$$
   On désigne par S la courbe associée à G dans un repère semi-log, x étant porté sur l'échelle logarithmique.
   a) Montrez que $G(1/x) = G(x)$. Comment sont représentés l'un par rapport à l'autre les points images de x et $1/x$ sur l'échelle logarithmique ? Déduisez-en une propriété géométrique de S.
   b) Calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) + 20 \log(x)$. Interprétez ce résultat.
   c) Construisez S.

Exercice IX - 27 Musique, complexes et logarithmes

On définit le logarithme de base 2 d'un réel strictement positif par $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Dans la suite du problème, $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Préliminaire

1. Étudiez les variations de la fonction $\log_2$.
2. Calculez $\log_2(32)$. Que dire de $\log_2(x)$ si le réel x est compris entre 2^n et 2^{n+1} ?
3. On suppose que $E(x) = n$. Calculez $E(x + 1)$ en fonction de n.

La la la la

La fréquence rapportée de la fréquence f à l'intervalle $[1, 2[$ est le nombre $r(f)$ défini de la façon suivante : soit p un entier tel que $2^p \leqslant f$ et $f < 2^{p+1}$, le nombre f appartenant à $[1, +\infty[$; alors $r(f) = 2^{-p} f$.

1. Montrez que $r(f) = 2^{-E\left(\log_2(f)\right)} f$
2. On dit qu'une fonction φ est multiplicativement périodique de période T (T > 0) si, pour tout réel t, on a $\varphi(Tt) = \varphi(t)$.
   Montrez que la fonction r est multiplicativement périodique de période 2.
   On suppose que $r(f_1) = r(f_2)$: peut-on en déduire qu'il existe un entier relatif p tel que $f_1 = 2^p f_2$?
   Quelle est la fréquence rapportée de $f = 203$?

3. À la fréquence f on associe le point M du plan complexe d'affixe $z(f) = f\,e^{2i\pi\log_2(f)}$.
   On dit que deux sons de fréquences f_1 et f_2 déterminent la même note si et seulement si $z(f_1)$ et $z(f_2)$ ont le même argument.
   Montrez alors que $r(f_1) = r(f_2)$. la réciproque est-elle vraie ?
4. On considère un LA à la fréquence $f_0 = 440$. On note $\zeta = 2^{1/12}$. On définit la suite des demi-tons montant du LA 440 de la façon suivante
   $$f_0 = 440 \qquad f_{n+1} = \zeta f_n$$
   Que pouvez-vous dire de cette suite ?
   Établissez que $f_{n+12} = 2f_n$ et interprétez physiquement cette relation.
   La suite des notes, à partir du LA 440, obtenu par demi-tons montant est LA#, SI, DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, ...
   À quelle note correspond un son de fréquence $f = 18794$?

K Exercices de Bac

Exercice IX - 28 Bac

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthononnal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. a) Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ.
   b) Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées.
   Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T) ; la réaliser sur la figure en annexe).
2. **Restitution organisée de connaissances**
   On suppose connue la propriété :
   « Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels strictement positifs, on a
   $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »
   En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a
   $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$.
3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe 1 (on laissera les traits de construction apparents).

Exercice IX - 29 Bac

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, les solutions de l'équation
$$E_a :\ x^a = a^x.$$

I Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2..
2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.
3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e.
   On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x - e\ln x$.
   a) **Question de cours :** On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.
   Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
   b) Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.

c) Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

d) Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e.

II Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

b) Ëtudier les variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unité : 2 cm).

3. Justifier à l'aide des résultats précédents le spropositions (P_1) et (P_2) suivantes :
(P_1) : si $a \in]0\ ;\ 1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;
(P_2) : si $a \in]1\ ;\ e[\ \cup\ ]e\ ;\ +\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ e[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]e\ ;\ +\infty[$.

Exercice IX - 30 Bac

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathcal{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.

3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0\ ;\ 4]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

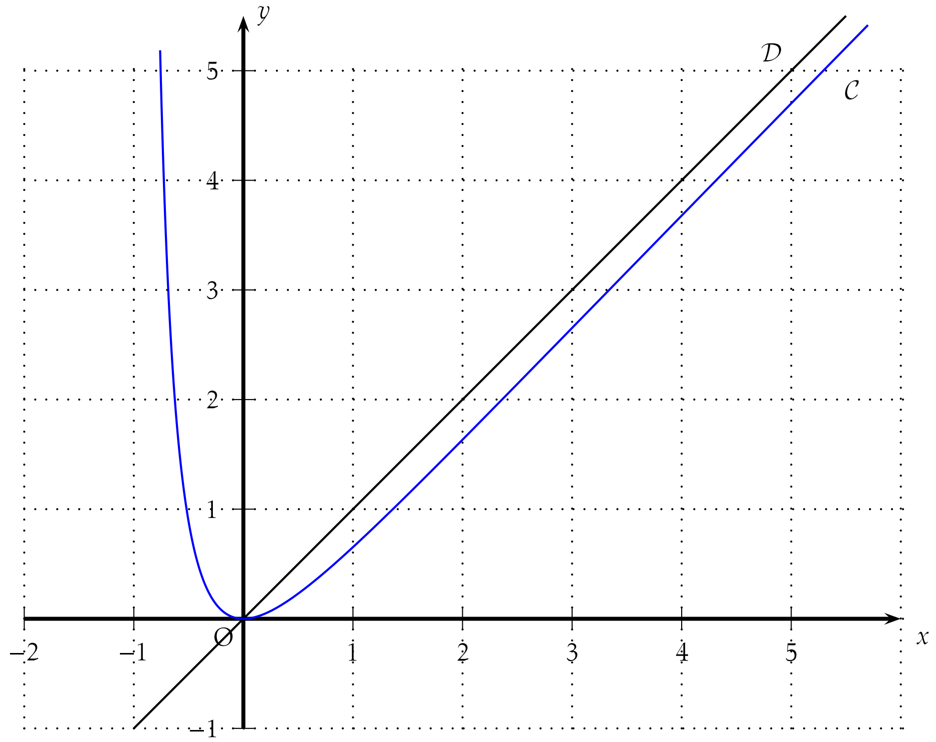
a) Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.

c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

e) Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.



Exercice IX - 31 Bac

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\ ;\ 0)$.

b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :
$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d) Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

L Résolution de ces exercices de Bac assistée par XCAS

Exercice IX - 28 Résolution complète avec XCAS

1. a) On commence par créer deux paramètres a et b qu'on fera varier à l'aide de curseurs :

```
assume(a:=[5,0.01,10])// a varie entre 0.01 et 10 et 5 est sa 1ère valeur
assume(b:=[5,0.01,10])// idem pour b
```

Puis (C), la courbe représentative de la fonction ln :

```
C:=graphe(ln(x))
```

On crée ensuite le point A de la courbe (C) d'abscisse a :

```
A:=point(a,ln(a))
```

ainsi que la tangente à (C) en A :

```
T:=tangente(C,A)
```

On note au passage qu'on obtient son équation formelle en fonction de a.

b) On crée ensuite les points B, Q et R :

```
B:=point(b,ln(b))
Q:=point(0,ln(a))
R:=point(0,ln(b))
```

On crée également le point P, intersection de (T) avec l'axe d'équation $x = 0$:

```
P:=inter_unique(T,droite(x=0))
```

On demande son ordonnée, en fonction de a :

```
ordonnee(P)
```

On calcule la longueur PQ :

```
simplifier(longueur(P,Q))
```

3. « Développons » l'ordonnée du point G en fonction de $\ln(a)$ et $\ln(b)$, c'est-à-dire en fonction des ordonnées de A et B :

```
lnexpand((ln(sqrt(a*b))))
```

G est donc le point de (C) de même ordonnée que le milieu de [PQ] que nous appellerons S :

```
S:=milieu(Q,R)
d:=droite(y=(ordonnee(S)))
G:=inter_unique(d,C)
```

Vérifions que G est bien le point cherché :

```
abscisse(G)
```

qui nous redonne bien $\ln\left(\sqrt{ab}\right)$

Exercice IX - 29 Résolution guidée

On précise que a et x doivent être strictement positifs :

```
assume(a>0) ;assume(x>0)
```

Tant qu'on y est, on demande à **XCAS** s'il connaît une solution exacte générale à notre problème :

```
resoudre(a^x=x^a,x)
```

Pas de chance...
Introduisons donc la fonction dépendant de x et a :

```
E(x,a):=a^x-x^a
```

Comment peut-on alors reformuler notre problème en utilisant cette fonction ?

I Étude de quelques cas particuliers

1. Utilisez la fonction E précédemment introduite pour répondre à la question.
2. Idem.
   b) On introduit la fonction h de la manière habituelle :

   ```
   h(x):=x-e*ln(x)
   ```

   et on demande les limites... de la manière habituelle. Par exemple :

   ```
   limite(h(x),x=0)
   ```

   c) On crée la fonction dérivée de h que nous noterons h_p :

   ```
   hp:=fonction_derivee(h):;
   ```

   On factorise pour étudier son signe :

   ```
   factoriser(hp(x))
   ```

   et on résout l'équation $h_p(x) > 0$:

   ```
   resoudre(hp(x)>0,x)
   ```

   d) On en déduit le tableau de variation et on calcule $h(\mathrm{e})$:

   ```
   h(e)
   ```

II Résolution de l'équation E_a

2. a) On définit f et on calcule ses limites de la manière habituelle. Attention, on veut la limite à droite en 0, donc on précise 1 en troisième argument (pour la limite à gauche, on rentre -1) :

   ```
   limite(f(x),x=0,1)
   ```

   b) On calcule $f_p(x)$ de la manière habituelle. Attention ! Puisque cette fois le résultat est une fraction, nous n'utiliserons pas `simplifier` ni `factoriser` mais `normal` qui est moins puissant mais qui permet de garder un dénominateur factorisé :

```
normal(fp(x))
```

On résout ensuite $f_p(x) > 0\ldots$ de la manière habituelle.

d) Il suffit de rentrer

```
graphe(f(x),x=0..100)
```

Exercice IX - 30 Résolution guidée

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathcal{C}$

1. On définit f et sa dérivée f_p comme d'habitude.
2. On reconnaît comme d'habitude dans les exercices de Bac le numérateur de la dérivée de f.

```
N(x):=numer(fp(x))
```

On étudie le signe de sa dérivée comme d'habitude. On calcule N(0).

3. On utilise la commande **resoudre** pour obtenir la solution de l'équation $f(x) = x$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Connaissant le sens de variation de f et connaissant

```
f(0);f(4);f(4.0)
```

on déduit le résultat en dressant un joli tableau.

2. a) On rentre :

```
graphe_suite(f(x),4,3)
```

puisque $u_0 = 4$ et qu'on s'arrête à u_3.

c) On étudie le signe de $f(x) - x$:

```
resoudre(f(x)-x>0)
```

... et on conclue connaissant le signe de $u_1 - u_0$

```
f(4.0)-4
```

Ou on peut être plus courageux et déterminer une procédure calculant u_n pour tout entier n :

```
u(n):={
si n==0 alors 4.0 sinon
f(u(n-1));
fsi;
}:;
```

Exercice IX - 31 Et un dernier pour la route

1. a) On définit une fonction f dépendant de n et x, en précisant que n est un entier naturel :

```
assume(n,integer) and assume(n>0)
f(n,x):=ln(x)+x/n-1
```

Puis on calcule les limites comme d'habitude.
Pour la dérivée, on peut essayer une variante pour changer en calculant l'expression de $f_n'(x)$:

```
deriver(f(n,x))
```

dont le signe est sans mystère.

2. et 3. On crée une procédure qui fait tout !

```
alpha(N):={
local f;
A:=point(0,1);
B:=point(N,0);
Delta:=droite(A,B);
Gamma:=graphe(ln(x),couleur=rouge);
f(x):=ln(x)+x/N-1;
a:=fsolve(f(x)=0,x,N); // a est donc alpha_n
D:=couleur(droite(x=a),bleu); // pour vérifier que  les alpha_n coïncident
print("alpha("+N+")="+a);
A,B,Delta,Gamma,D;
}:;
```

On crée ensuite un paramètre n qu'on fera varier au curseur :

```
k:=element(1 .. 100)
```

Mais pour être sûr d'avoir un entier, on prend sa partie entière en utilisant `floor` :

```
K:=floor(k)
```

Ensuite on demande α_K en faisant varier K :

```
alpha(K)
```

M Bac 2009

Exercice IX - 32

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

a) En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.

c) La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

a) On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b) Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice IX - 33

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f défmie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. Vérifier que : $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.

a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b) En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

c) Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3. Recherche d'une valeur approchée de α

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.

b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leqslant \alpha \leqslant v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Exercice IX - 34

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, positive sur $[1\,;\,+\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

a) Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\,;\,+\infty[$.

b) En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

Exercice IX - 35

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 4\right).$$

PARTIE A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Montrer que sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.
   Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1} .
   c) Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

PARTIE B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+l} = f(u_n)$.
La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1. À partir de u_0, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
2. Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse α.
3. a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   b) Démontrer que la suite (u_n) converge.
   c) Déterminer sa limite.