Chaînes de Markov : une initiation

INFO1 - Semaine 22

Guillaume CONNAN

IUT de Nantes - Dpt d'informatique

Dernière mise à jour : 30 mai 2012

Sommaire

Андрей Андреевич МАРКОВ (1856 - 1922)

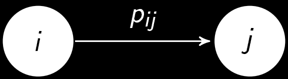
Sommaire

Sommaire

Les boules dans l'urne, deux tirages successifs sans remise...

$$i \xrightarrow{p_{ij}} j$$

Le présent contient toutes les données du passé...



Le présent contient toutes les données du passé...

Sommaire


СТО ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ В.И.ЛЕНИНА
СС СР
ОДИН
РУБЛЬ


SPORTSBODY.ru

- état absorbant
- bord
- états intérieurs
- chaîne absorbante
- parcours (promenade) aléatoire
- longueur d'un parcours

- état absorbant
- bord
- états intérieurs
- chaîne absorbante
- parcours (promenade) aléatoire
- longueur d'un parcours

- état absorbant
- bord
- états intérieurs
- chaîne absorbante
- parcours (promenade) aléatoire
- longueur d'un parcours

- état absorbant
- bord
- états intérieurs
- chaîne absorbante
- parcours (promenade) aléatoire
- longueur d'un parcours

- état absorbant
- bord
- états intérieurs
- chaîne absorbante
- parcours (promenade) aléatoire
- longueur d'un parcours

- état absorbant
- bord
- états intérieurs
- chaîne absorbante
- parcours (promenade) aléatoire
- longueur d'un parcours

Les règles

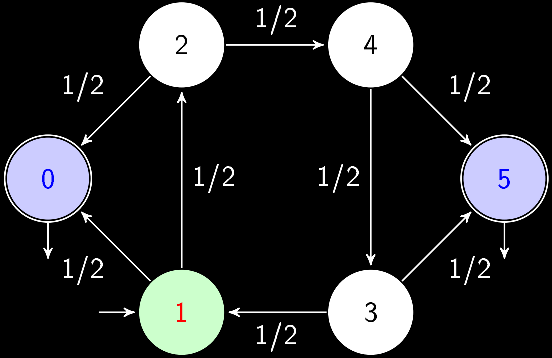
1. la probabilité de réaliser un parcours donné à partir d'un point donné est égale au produit de toutes les probabilités de transition le long de ce parcours ;
2. La probabilité d'atteindre un sous-ensemble du bord à partir d'un état donné est égale à la somme des probabilités de tous les parcours allant de cet élément aux éléments du sous-ensemble ;
3. la durée moyenne des parcours allant d'un état au bord (le *temps moyen d'absorption*) est la moyenne des longueurs des parcours de ce sommet au bord pondérée par les probabilités de chaque transition. Si on introduit une variable aléatoire égale au temps de parcours, il s'agit donc de l'espérance de cette v.a.r.

Les règles

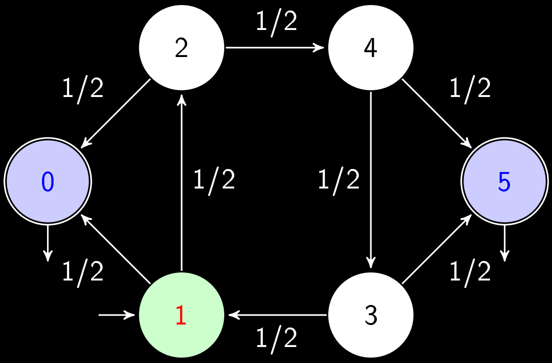
1. la probabilité de réaliser un parcours donné à partir d'un point donné est égale au produit de toutes les probabilités de transition le long de ce parcours ;
2. La probabilité d'atteindre un sous-ensemble du bord à partir d'un état donné est égale à la somme des probabilités de tous les parcours allant de cet élément aux éléments du sous-ensemble ;
3. la durée moyenne des parcours allant d'un état au bord (le *temps moyen d'absorption*) est la moyenne des longueurs des parcours de ce sommet au bord pondérée par les probabilités de chaque transition. Si on introduit une variable aléatoire égale au temps de parcours, il s'agit donc de l'espérance de cette v.a.r.

Les règles

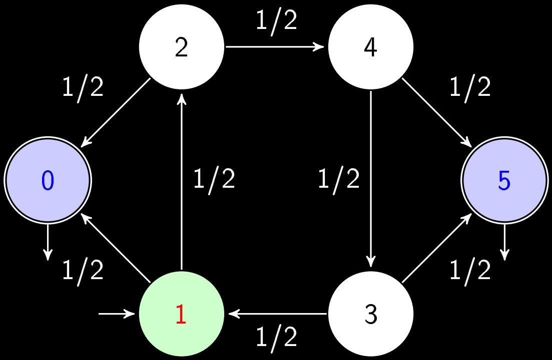
1. la probabilité de réaliser un parcours donné à partir d'un point donné est égale au produit de toutes les probabilités de transition le long de ce parcours ;
2. La probabilité d'atteindre un sous-ensemble du bord à partir d'un état donné est égale à la somme des probabilités de tous les parcours allant de cet élément aux éléments du sous-ensemble ;
3. la durée moyenne des parcours allant d'un état au bord (le *temps moyen d'absorption*) est la moyenne des longueurs des parcours de ce sommet au bord pondérée par les probabilités de chaque transition. Si on introduit une variable aléatoire égale au temps de parcours, il s'agit donc de l'espérance de cette v.a.r.



$$p_1 = \underbrace{\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)}_{\text{0 boucle}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{3+4}}+\frac{1}{2^{4+4}}\right)}_{\text{1 boucle}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{3+2\times4}}+\frac{1}{2^{4+2\times4}}\right)}_{\text{2 boucles}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{3+3\times4}}+\frac{1}{2^{4+3\times4}}\right)}_{\text{3 boucles}}+\cdots$$



$$p_1 = \underbrace{\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)}_{\text{0 boucle}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{3+4}}+\frac{1}{2^{4+4}}\right)}_{\text{1 boucle}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{3+2\times 4}}+\frac{1}{2^{4+2\times 4}}\right)}_{\text{2 boucles}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{3+3\times 4}}+\frac{1}{2^{4+3\times 4}}\right)}_{\text{3 boucles}}+\cdots$$



Faites un calcul similaire pour déterminer la probabilité de perdre : vous connaissez déjà le résultat donc vous pourrez contrôler vos calculs...

Temps de parcours

1. $1 \to 0$ précédé de k cycles : $X = 4k+1$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+1]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{4k+1}}$;
2. $1 \to 2 \to 0$ précédé de k cycles : $X = 4k+2$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+2]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^{4k+2}}$;
3. $1 \to 2 \to 4 \to 5$ précédé de k cycles : $X = 4k+3$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+3]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^{4k+3}}$;
4. $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5$ précédé de k cycles : $X = 4k+4$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+4]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^{4k+4}}$.

Temps de parcours

1. $1 \to 0$ précédé de k cycles : $X = 4k + 1$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+1]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{4k+1}}$;
2. $1 \to 2 \to 0$ précédé de k cycles : $X = 4k + 2$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+2]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^{4k+2}}$;
3. $1 \to 2 \to 4 \to 5$ précédé de k cycles : $X = 4k + 3$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+3]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^{4k+3}}$;
4. $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5$ précédé de k cycles : $X = 4k + 4$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+4]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^{4k+4}}$.

Temps de parcours

1. $1 \to 0$ précédé de k cycles : $X = 4k+1$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+1]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{4k+1}}$;
2. $1 \to 2 \to 0$ précédé de k cycles : $X = 4k+2$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+2]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^{4k+2}}$;
3. $1 \to 2 \to 4 \to 5$ précédé de k cycles : $X = 4k+3$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+3]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^{4k+3}}$;
4. $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5$ précédé de k cycles : $X = 4k+4$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+4]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^{4k+4}}$.

Temps de parcours

1. $1 \to 0$ précédé de k cycles : $X = 4k+1$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+1]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{4k+1}}$;
2. $1 \to 2 \to 0$ précédé de k cycles : $X = 4k+2$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+2]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^{4k+2}}$;
3. $1 \to 2 \to 4 \to 5$ précédé de k cycles : $X = 4k+3$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+3]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^{4k+3}}$;
4. $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5$ précédé de k cycles : $X = 4k+4$,
   $\mathbb{P}([X = 4k+4]) = \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^{4k+4}}$.

Rappel

Nous avons prouvé au module précédent que :

$$\forall q \in \mathbb{R},\ |q| < 1 \Longrightarrow S = \sum_{n \geqslant 0} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Pour $|q| < 1$, notons $T = \sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ en supposant que cette écriture a un sens.

Calculer $(1-q)T$ en fonction de S

Rappel

Nous avons prouvé au module précédent que :

$$\forall q \in \mathbb{R},\ |q| < 1 \Longrightarrow S = \sum_{n \geqslant 0} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Pour $|q| < 1$, notons $T = \sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ en supposant que cette écriture a un sens.

Calculer $(1-q)T$ en fonction de S

Rappel

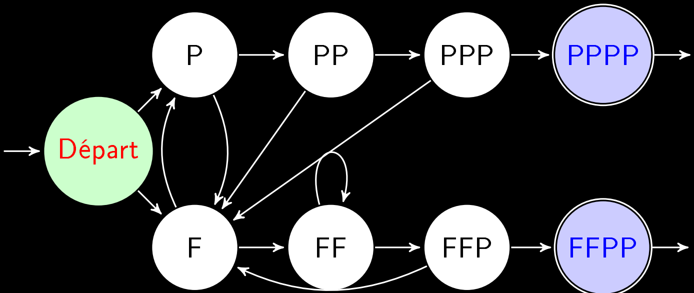
Nous avons prouvé au module précédent que :

$$\forall q \in \mathbb{R},\ |q| < 1 \Longrightarrow S = \sum_{n \geqslant 0} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Pour $|q| < 1$, notons $T = \sum_{n \geqslant 1} n q^{n-1}$ en supposant que cette écriture a un sens.
Calculer $(1-q)T$ en fonction de S

Sommaire


СТО ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ В.И.ЛЕНИНА
СС СР
ОДИН
РУБЛЬ


Départ
P
PP
PPP
PPPP
F
FF
FFP
FFPP

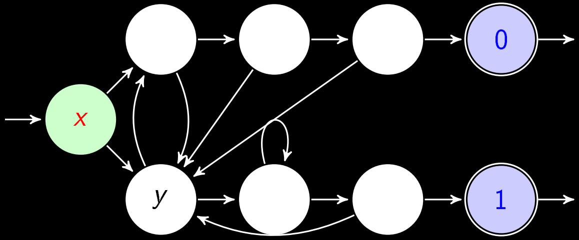
- probabilité p_i pour un état i d'être « absorbé » dans un sous-ensemble SB du bord ;
- $p_i = 1$;
- $p_i = 0$
- $p_i = \sum_{k \in S} p_{ik} p_k$
- $p_i = \sum_{k \in \mathcal{E}_i} p_{ik} p_k$

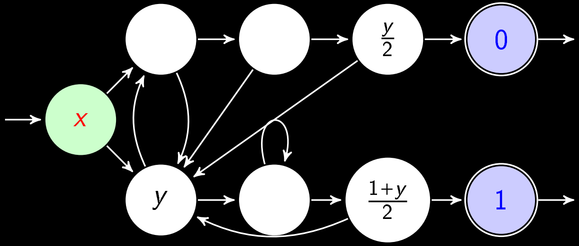
- probabilité p_i pour un état i d'être « absorbé » dans un sous-ensemble SB du bord ;
- $p_i = 1$;
- $p_i = 0$
- $p_i = \sum_{k \in S} p_{ik} p_k$
- $p_i = \sum_{k \in \mathcal{E}_i} p_{ik} p_k$

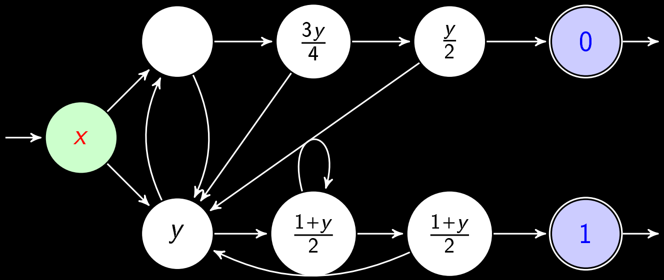
- probabilité p_i pour un état i d'être « absorbé » dans un sous-ensemble SB du bord ;
- $p_i = 1$;
- $p_i = 0$
- $p_i = \sum_{k \in S} p_{ik} p_k$
- $p_i = \sum_{k \in \mathcal{E}_i} p_{ik} p_k$

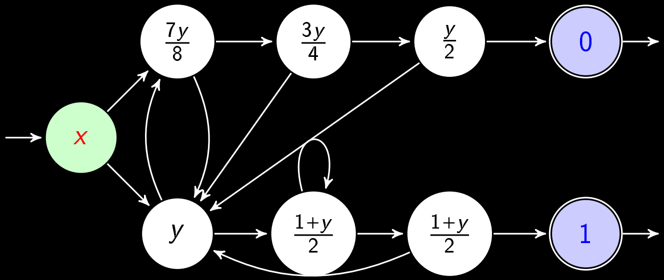
- probabilité p_i pour un état i d'être « absorbé » dans un sous-ensemble SB du bord ;
- $p_i = 1$;
- $p_i = 0$
- $p_i = \sum_{k \in S} p_{ik} p_k$
- $p_i = \sum_{k \in \mathcal{E}_i} p_{ik} p_k$

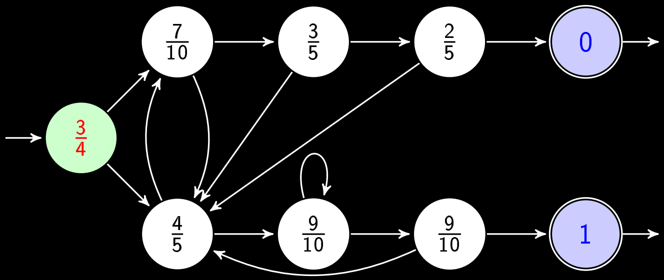
- probabilité p_i pour un état i d'être « absorbé » dans un sous-ensemble SB du bord ;
- $p_i = 1$;
- $p_i = 0$
- $p_i = \sum_{k \in S} p_{ik} p_k$
- $p_i = \sum_{k \in \mathcal{E}_i} p_{ik} p_k$


x
y
0
1


x
y
y/2
1+y/2
0
1


x
y
3y/4
y/2
0
(1+y)/2
(1+y)/2
1


x
$\frac{7y}{8}$
$\frac{3y}{4}$
$\frac{y}{2}$
0
y
$\frac{1+y}{2}$
$\frac{1+y}{2}$
1



$\frac{3}{4}$
$\frac{7}{10}$
$\frac{3}{5}$
$\frac{2}{5}$
0
$\frac{4}{5}$
$\frac{9}{10}$
$\frac{9}{10}$
1

Durée moyenne

La valeur du délai d'absorption est égal à 1 augmenté de la moyenne pondérée des délais d'absorption en les états voisins.

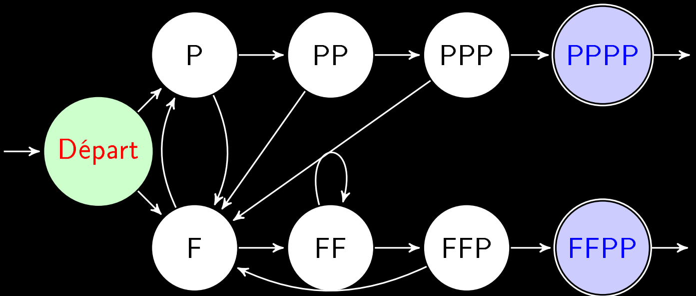
$$m_i = 1 + \sum_{k \geqslant 1} p_{ik} m_k$$

Durée moyenne

La valeur du délai d'absorption est égal à 1 augmenté de la moyenne pondérée des délais d'absorption en les états voisins.

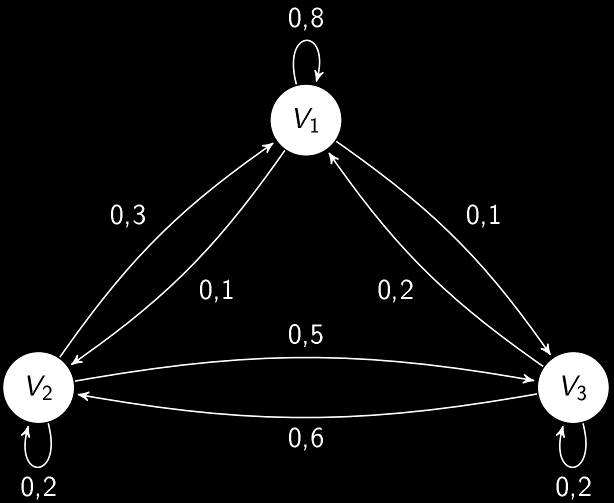
$$m_i = 1 + \sum_{k \geqslant 1} p_{ik} m_k$$

$$X_i = \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{1}_{ik}(1 + Y_k)$$


Départ
P
PP
PPP
PPPP
F
FF
FFP
FFPP

Sommaire


WWW.UNIVERSALSTEREO.COM.MX
ABBA
WWW.UNIVERSALSTEREO.COM.MX


0,8
V_1
0,3
0,1
0,1
0,2
0,5
V_2
V_3
0,6
0,2
0,2

matrice de transition

On notera $x_i^{(k)}$ la proportion de trafiquants qui se trouvent au matin du jour k dans la ville V_i.

Définition 1 (Vecteur d'état)

On appelle *vecteur d'état* tout élément $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

Ainsi, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)$ est un vecteur d'état (pourquoi ?).

Démontrez que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x^{(k)} = x^{(k-1)} \cdot P$$

puis que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x^{(k)} = x^{(0)} \cdot P^k$$

On notera $x_i^{(k)}$ la proportion de trafiquants qui se trouvent au matin du jour k dans la ville V_i.

Définition 1 (Vecteur d'état)

On appelle *vecteur d'état* tout élément $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

Ainsi, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)$ est un vecteur d'état (pourquoi ?).

Démontrez que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x^{(k)} = x^{(k-1)} \cdot P$$

puis que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x^{(k)} = x^{(0)} \cdot P^k$$

On notera $x_i^{(k)}$ la proportion de trafiquants qui se trouvent au matin du jour k dans la ville V_i.

Définition 1 (Vecteur d'état)

On appelle *vecteur d'état* tout élément $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

Ainsi, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)$ est un vecteur d'état (pourquoi ?).
Démontrez que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x^{(k)} = x^{(k-1)} \cdot P$$

puis que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x^{(k)} = x^{(0)} \cdot P^k$$

Supposons que le chef de la mafia locale dispose de 1000 trafiquants qui partent tous le matin du jour 0 de la ville de Zlot. Quelle sera la proportion de trafiquants dans chacune des villes au bout d'une semaine ? d'un an ?

Il s'agit donc de calculer des puissances successives de P.

On obtient les proportions au bout d'une semaine en calculant $x^{(0)} \cdot p^7$ avec $x^{(0)} = (1000, 0, 0)$.

Nous allons utiliser SCILAB pour les longs calculs.

Supposons que le chef de la mafia locale dispose de 1000 trafiquants qui partent tous le matin du jour 0 de la ville de Zlot. Quelle sera la proportion de trafiquants dans chacune des villes au bout d'une semaine ? d'un an ?
Il s'agit donc de calculer des puissances successives de P.
On obtient les proportions au bout d'une semaine en calculant $x^{(0)} \cdot p^7$ avec $x^{(0)} = (1000, 0, 0)$.
Nous allons utiliser SCILAB pour les longs calculs.

Définition 2 (Matrice de transition régulière)

Une matrice de transition A est dite régulière si, et seulement si, il existe un entier naturel r tel que A^r a ses coefficients tous **strictement** positifs.

Théorème 3 (Théorème des chaînes de Markov régulières)

Soit A une matrice régulière. Il existe une matrice stochastique :

$$A_\infty = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n = A_\infty$.

De plus, $v = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *est l'unique vecteur d'état stationnaire (tel que* $v \cdot A = v$*).*