Préliminaires : *ce devoir nécessite un peu de recherche personnelle. N'hésitez donc pas à ouvrir des dictionnaires, des manuels de mathématiques, à hanter le CDI...*
Un polyèdre est un solide de l'espace delimité par des faces polygonales. Le cube, le pavé droit, ... sont des polyèdres.
Un polyèdre est dit *régulier* si toutes ses faces sont identiques et qu'elles sont des polygones réguliers. Dans ce devoir, on ne s'intéressera qu'au polyèdres *convexes* c'est à dire sans « creux ». Ces solides sont appelés *solides de Platon* (427 av. J.-C. / 348 av. J.-C.).
L'objectif du devoir est de montrer qu'il n'existe que cinq solides de Platon.

I - Les polygones réguliers

1. Donner la définition d'un polygone régulier à n côtés.
2. On considère $ABCDE$ un pentagone régulier de centre O tel que $OA = 4$ cm. On note I le milieu de $[AB]$.
   a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
   b. On admet que $\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Calculer la valeur exacte de IB puis celle de AB.
   c. Montrer que la valeur exacte de OI est $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$.
   d. Calculer le périmètre puis l'aire de $ABCDE$. Donner les valeurs arrondies au dixième.

II - Les solides de Platon

On considère un polyèdre régulier convexe. On note A son nombre d'arêtes, S sont nombre de sommets et F son nombre de faces.
On admet la formule suivante qui est vraie pour tous les polyèdres de l'espace :

$$S + F = 2 + A \quad \text{(1) formule d'Euler (1 707/1 783)}$$

Les faces du solide sont des polygones réguliers à n côtés. Toutes les faces du solide sont identiques donc chaque sommet appartient à un même nombre de faces ; on appelle ce nombre m : c'est à dire que chaque sommet du polyèdre est aussi le sommet de m faces du solide.

1. Expliquer pourquoi m et n sont supérieurs ou égaux à 3.
2. À combien de faces appartient chaque arête ? Expliquer alors pourquoi $2A = nF$.
3. On suppose qu'on découpe chaque face du patron du solide pour obtenir F polygones réguliers à n côtés.
   a. Exprimer en fonction de n et F le nombre total de sommets.
   b. Même question en fonction de m et S.
   c. En déduire que $nF = mS$.
   On a donc : $2A = nF = mS$ (2).
4. Diviser les deux membres de l'égalité (1) par $2A$. En déduire en utilisant (2) la formule suivante :
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{2} \quad (3)$$
5. A est strictement positif donc $\frac{1}{A}$ aussi. En déduire que $\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.
6. Cette inégalité peut-elle être vérifiée si m et n sont tous les deux supérieurs ou égaux à 4 ?
   On conclut donc que soit m, soit n (soit les deux) est égal à 3.

7. Dans cette question on suppose que $n = 3$:

   a. Remplacer n par 3 dans l'égalité (3). Montrer alors que $\frac{1}{m} = \frac{1}{6} + \frac{1}{A}$.

   b. m peut-il être égal à 6 ? Justifier. m peut-il être supérieur à 6 ?

   c. Conclusion : si $n = 3$, quelles sont les trois valeurs possibles de m ?

8. Dans cette question, c'est m qui vaut 3. En utilisant un raisonnement analogue à la question précédente, expliquer pourquoi les seules valeurs possibles de n sont alors 3, 4 et 5.

   Finalement, on a trouvé cinq solutions pour les nombres n et m :

$$\begin{cases} n = 3 \\ m = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} n = 3 \\ m = 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} n = 3 \\ m = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} n = 4 \\ m = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} n = 5 \\ m = 3 \end{cases}$$

   Ces cinq solutions correspondent chacune à un polyèdre régulier.

9. Étude des polyèdres :

   a. Que peut-on dire des faces du polyèdre si $n = 3$? si $n = 4$? si $n = 5$?

   b. Pour chaque solution trouvée pour le couple $(m; n)$ déterminer le nombre de faces, le nombre de sommets et le nombre d'arêtes du polyèdre correspondant. (On pourra s'aider de la double égalité (2) trouvée à la question 3 et de la formule d'Euler)

   c. Trouver pour chaque cas le nom du polyèdre correspondant.

10. Associer à chaque figure ci-dessous son nom :