TROISIÈME LEÇON

PRIMITIVES

Exercice 1 Primitives d'une fonction du type $u' u^n$

Si vous reconnaissez une forme du style $u' u^n$, alors une primitive sera $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$.
Soit par exemple

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} = 3(x-1)^{-2}$$

Si nous posons

$$u(x) = x - 1$$

alors

$$u'(x) = 1$$

donc

$$f(x) = 3u'(x)\big(u(x)\big)^{-2}$$

et finalement

$$\mathrm{F}(x) = 3\frac{\big(u(x)\big)^{-2+1}}{-2+1} = 3\frac{\big(u(x)\big)^{-1}}{-1} = -\frac{3}{x-1}$$

Exercice 2

f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [-1, 8]$ par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 8x^2 + 8x - 3}{x^2 + 4x + 4}$$

1. Prouvez que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = 2x - \dfrac{3}{(x+2)^2}$

2. a) Déduisez-en *une* primitive G de f sur I.

b) Calculez *la* primitive F de f telle que $\mathrm{F}(0) = 2$.

Exercice 3

Étudiez si F est une primitive de f sur I

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+8x-5}{(x^2+x+3)^2}$ et $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2+x+3}$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x\sqrt{x}}$ et $\mathrm{F}(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}$ avec $\mathrm{I} =]0, +\infty[$

3. $f(q) = \dfrac{3q-4}{\sqrt{2q-4}}$ et $\mathrm{F}(q) = q\sqrt{2q-4}$ avec $\mathrm{I} =]2, +\infty[$

Exercice 4

Le *coût marginal* est la dérivée du *coût total.*
Le coût marginal d'un produit en milliers d'euros est défini sur $[1, 10]$ par

$$\mathrm{C}_m(q) = q^2 - 10q + \frac{1}{q^2} + 30$$

Déterminez le coût total sachant qu'il est de 10 000 euros pour $q = 1$.

Exercice 5

1. f est la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}$

Calculez une primitive F de f sur $]2, +\infty[$

2. G est la fonction définie sur $]2,+_infty[$ par $G(x)=\dfrac{3x-4}{x-2}$

Calculez la fonction dérivée de G.

3. Que pouvez-vous en déduire pour les fonctions F et G ?

Vérifiez ce résultat en calculant $F(x)-G(x)$.

Exercice 6 Reconnaître $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u^n}$,...

Déterminez une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

1. $g : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ **2.** $h : x \mapsto \dfrac{e^x+3}{\left(e^x+3x\right)^3}$ **3.** $k : x \mapsto \dfrac{1}{(ax+b)^2}$

Exercice 7 Reconnaître $nu'u^n$, $u'e^u$,...

Déterminez une primitive sur $\mathbb{R}$ de

1. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

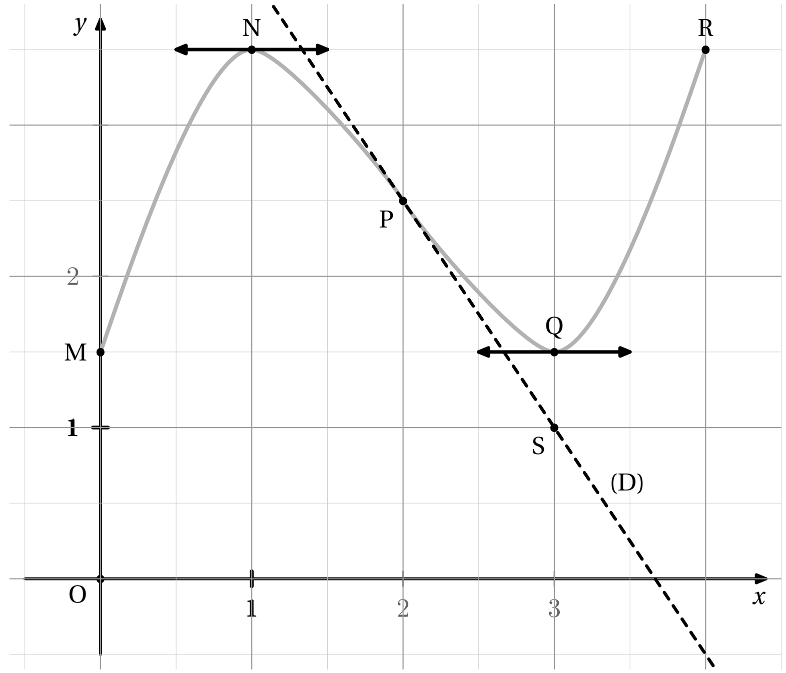
2. $g : x \mapsto e^{3x+2}$

3. $h : x \mapsto (2x+1)e^{x^2+x+7}$

4. $k : x \mapsto \sin(3x)+3\cos(2x)$

Exercice 8

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0,4]$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ est la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous



Les points M, N, P, Q et R appartiennent à $\mathscr{C}$. Les coordonnées de M sont $(0,3/2)$, celles de N $(1,7/2)$, celles de P $(2,2/5)$ celles de Q $(3,3/2)$ et celles de R $(4,7/2)$.
La courbe $\mathscr{C}$ admet en chacun des points N et Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La droite (D) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P ; elle passe par le point S de coordonnées $(3,1)$.

1. a) Donnez par lecture graphique $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

b) Déterminez une équation de la droite (D).

2. Déterminez à l'aide du graphique le nombre de solutions de l'équation $f(x)=3$ sur l'intervalle $[0,4]$.

3. a) Pour tout $x\in[0,4]$, on admet que $f'(x)=a(x-1)(x-3)$, a étant une constante réelle.

Déterminer a à l'aide des résultats de la question 1)a).

b) Vérifiez que pour tout $x\in[0,4]$, $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2-6x+\dfrac{9}{2}$.

Déterminez l'expression de $f(x)$ pour $x\in[0,4]$.

Exercice 9

Complétez le tableau suivant

f	Je pose $u =$	Alors $u' =$	Forme de f en fonction de u et u'	Une primitive de f est
$\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$				
$\frac{\cos(2x)}{(3+\sin(2x))^3}$				
$\frac{(\ln x)^2}{x}$				
$x\sqrt{x^2-1}$				
$16\frac{e^x}{1+2e^x}$				
$\frac{e^{1/x}}{x^2}$				
$\frac{1}{x\ln x}$				
$\frac{e^x}{(2+e^x)^3}$				
$xe^{-x^2/2}$				
$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$				
$\cos(x)\sin^5(x)$				