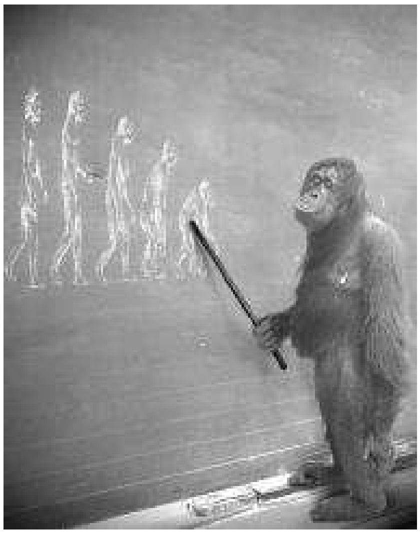
Sixième Leçon

LES SUITES



Résumé Même si elles ne constituent qu'un cas particulier des fonctions numériques, les suites méritent une étude à part entière car elles jouent un rôle extrêmement important à la fois en mathématiques et en physique. Elles permettent en effet dans les deux cas de fournir une approximation du « réel » . Après avoir mis en place un raisonnement important et fait quelques rappels de première, nous découvrirons donc la notion de limite de suite sous les angles physique et mathématique, puis nous parlerons d'applications importantes, en particulier les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et les suites adjacentes.

A Récurrence

A 1 Découverte

A 1 a Génétique syldave

Les scientifiques syldaves viennent de mettre en évidence que la terrible maladie de Mathieu est en fait héréditaire : cette maladie frappe depuis des siècles les petits syldaves et les fait naître avec un unique mais énorme cheveu sur la tête.
C'est Vaclav Grtschtsz qui, le premier, contracta cette maladie en 1643 après être rentré en contact avec des vénusiens : ce fait peu connu marque la cause de l'apparition de la maladie en Syldavie. Depuis, tous ses descendants ont souffert de ce terrible mal et aucun médicament terrestre ne semble en mesure de stopper cette calamité.
Résumons les faits :

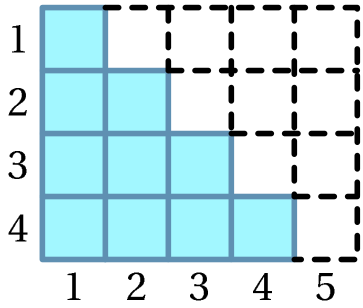
1. la maladie de Mathieu fait naître les nouveaux nés avec un énorme et unique cheveu sur la tête. Notons n la n^{e} génération aprés Vaclav.
   Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « la n^{e} génération sera infectée par la maldie »
2. initialisation : un premier syldavien est infecté en 1643, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
3. l'hérédité de la maladie a été prouvée : si un des parents de la k^{e} génération est atteint, alors ses enfants de la $k+1^{\text{e}}$ génération seront également infectés, ce qui se traduit par

$$\mathcal{P}(k) \text{ vraie} \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie}$$

4. nous en déduisons que, quelque soit la génération n des descendants de Vaclav, ceux-ci seront infectés, c'est à dire que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quelque soit l'entier naturel n.

A 1 b Jouons aux cubes

Voici un test de fin d'étude maternelle en Syldavie : prenez un cube, placez en-dessous deux autres cubes, et encore en-dessous trois cubes, etc.



Combien y a-t-il de cubes bleus au total sur le dessin ci-dessus ? On peut encore les compter à la main, mais que faire si je vous demande le nombre de cubes lorsqu'on a placé 100 rangées ? n rangées ?
Le dessin nous donne une idée : si nous complétons la figure pour former un rectangle, il y a deux fois plus de cubes, mais maintenant nous pouvons les compter. Il y en a en effet $\dfrac{4\times(4+1)}{2}$, et donc

$$1+2+3+4=\frac{4\times(4+1)}{2}$$

Reprenons la méthode adoptée pour étudier la génétique syldave :

1. Nous allons essayer de prouver que la propriété suivante est vraie pour tout entier naturel non nul n

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \text{« } 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\text{ »}$$

2. Il est facile de vérifier que $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$, donc la deuxième étape de notre raisonnement est vérifiée

$$\mathcal{P}(1)\ \text{ est vraie}$$

3. Supposons qu'une « génération », appelons-la par exemple la k ^{e} , soit « infectée ». Plus sobrement on dira : soit k un entier supérieur à 1. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie et essayons alors de montrer que cela implique que la génération suivante , la $k+1$ ^{e} , sera elle aussi infectée, c'est à dire

$$\mathcal{P}(k)\ \text{ vraie} \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)\ \text{ vraie}$$

   Il s'agit donc de calculer $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$ sachant que $1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$, or

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \underbrace{1+2+3+\cdots+k} \quad +(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2} \quad +(k+1)\\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)\\
&= (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)\\
&= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}
\end{aligned}$$

   Nous en déduisons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie elle aussi.

4. Nous avons vérifié que la propriété était vraie au rang 1 et qu'elle était héréditaire. Nous allons donc en déduire que la propriété sera toujours vraie, quelque soit l'entier naturel non nul n grâce au théorème admis suivant

A 2 Le théorème

Théorème VI - 1 : (admis) Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}$ une propriété dépendant d'un rang n. Pour montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n supérieurs à un certan n_0

1. On expose clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$.
2. On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie : c'est le **pas initial** de la récurrence.
3. On **suppose** ensuite que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain entier k : c'est **l'hypothèse de récurrence** et on démontre alors que la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : c'est le passage du rang k au rang $k+1$ qui exprime que la propriété $\mathcal{P}$ est **héréditaire**.
4. Il reste à **conclure** en annonçant que, par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n

A 3 Applications

Exercice VI - 1 Jouons encore...

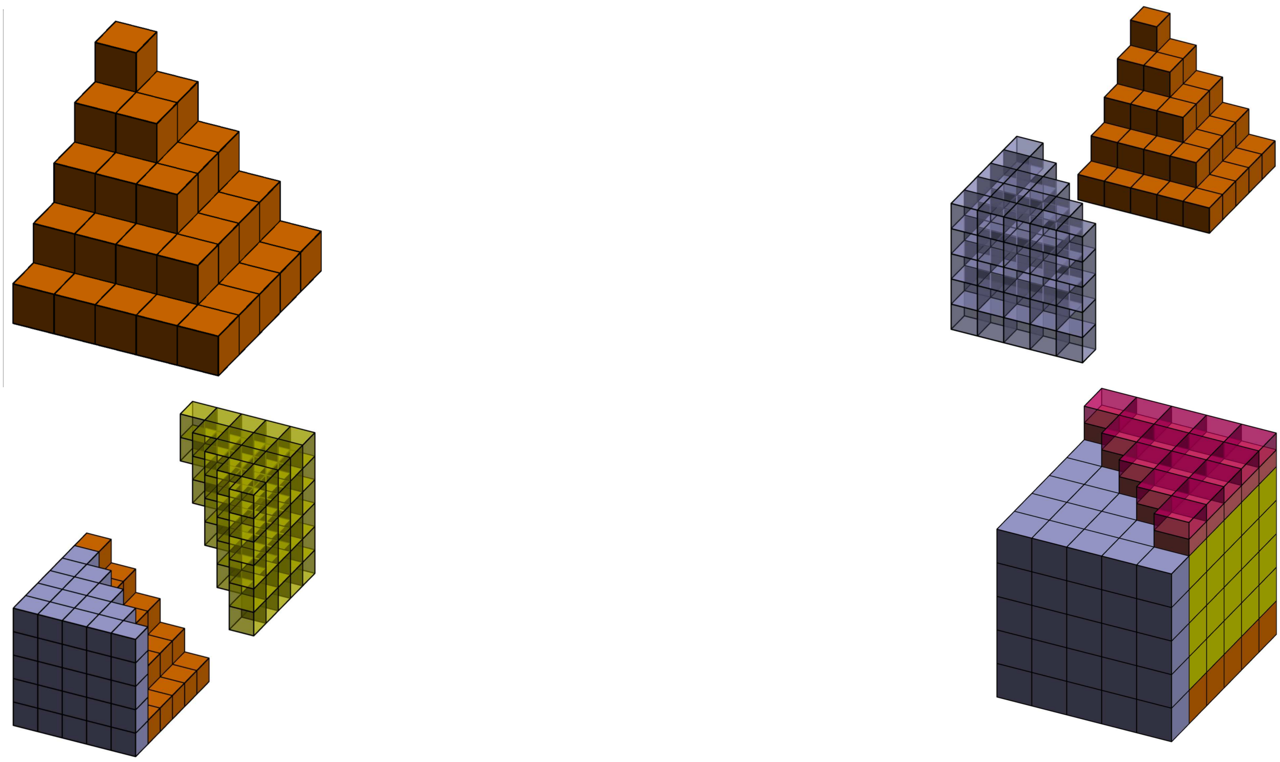
Prenons un cube, rajoutons trois autres cubes pour former un carré, puis cinq autres cubes pour former un plus grand carré, puis sept autres cubes pour former un carré encore plus grand...

Nous voulons maintenant calculer la somme des n premiers entiers impairs.

1. Proposez une formule générale inspirée du résultat de notre petite activité de *maternelle*.
2. Démontrez la formule par récurrence.

Exercice VI - 2 Récurrence chinoise

Que vous inspire le petit dessin suivant (il est interdit de répondre : « rien ! »)



B Suites arithmetico-géométriques

B 1 Quelques rappels...

B 1 a Suites arithmétiques

Définition VI - 1 : Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + b$$

On appelle b la raison de la suite

Les propriétés suivantes se montrent par récurrence (faites-le !)

Propriété VI - 1 :

Étant donné une suite arithmétique de raison b

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nb$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{1er terme+dernier terme})}{2} = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$

En particulier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

B 1 b Suites géométriques

Définition VI - 2 : Suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel a tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a \cdot u_n$$

On appelle a la raison de la suite

Les propriétés suivantes se montrent par récurrence (faites-le !)

Propriété VI - 2 :

Étant donné une suite géométrique de raison a

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \cdot a^n$
- Si $a \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

B 2 Découverte

Exercice VI - 3 Observons...

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 10u_n - 9 \end{cases}$$

Observez, conjecturez, prouvez.

Exercice VI - 4 Découvrons...

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

Soit α la solution de l'équation $x = 3x + 1$

- Étudiez la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$.
- Déduisez zan l'expression du terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
- Exprimez alors u_n en fonction de n.

Exercice VI - 5 Généralisons...

Soient $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

- Pourquoi a-t-on posé $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$?
- Soit α la solution de l'équation $x = ax + b$. Pourquoi est-on sûr que α existe ?
- Étudiez la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$.
- Déduisez-en l'expression du terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
- Exprimez alors u_n en fonction de n.
- Pourquoi a-t-on eu l'idée d'utiliser la solution de $x = ax + b$?

Exercice VI - 6 Dans le même esprit...

Étudiez $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{5} \end{cases}$ et calculez $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Mêmes questions avec $\begin{cases} u_0 = -3/2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$

C Convergence d'une suite

C 1 Qu'est-ce qu'une suite ?

C 1 a Définition

Pour faire court, on pourrait se contenter de dire
Mais développons un peu. Considérons par exemple la suite de terme général $u_{n+1} = \sqrt{2n+1}$.
La suite u qu'on note encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [a] ou même (u_n) est la fonction qui, à n'importe quel **entier** n associe le **réel** $\sqrt{2n+1}$

a. c'est à dire l'ensemble des valeurs prises par u_n quand n *décrit* l'ensemble $\mathbb{N}$ qu'on pourrait aussi noter $\{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{1000}, \cdots, u_{197895}, \cdots\}$: on identifie ici la fonction et les valeurs qu'elle prend, ce qui se comprend car on peut « énumérer » ces valeurs

Définition VI - 3 : Suite numérique

Une suite numérique réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Si ce n'est qu'une fonction, pourquoi lui avoir donné un nom spécial ?

C 1 b Inerprétation physique

Enfilons une blouse : et hop ! Nous voici devenus physiciens.
Laissons tomber un objet dans un tube où nous avons au préalable fait le vide. Notons sa position chaque seconde : $h_0 = 0\text{m}$, $h_1 = 4,9\text{m}$, $h_2 = 19,6\text{m}$, $h_3 = 44,1\text{m}$, $h_4 = 78,4\text{m}$.
Avec un bon sens de l'observation, nous remarquons que

$$h_n \approx \frac{1}{2}gn^2$$

avec $g \approx 9,81\text{ms}^{-2}$ et n le *rang* de la mesure correspondant ici au nombre de secondes écoulées depuis le début de la chute.
Nous avons ainsi tout naturellement construit une *suite* de mesures qui est en fait une suite numérique de *terme général* $h_n = 4,9n^2$.
Aurait-il été plus simple de noter $h(t) = 4,9t^2$ avec t le temps en secondes et $h(t)$ la hauteur en mètres ?
Attention ! Nous avons pris des mesures chaque seconde. Rien ne nous dit qu'entre chaque mesure il ne se passe pas des choses extrèmement bizarres. Bien sûr le physicien généralisera le résultat à n'importe quelle valeur de t, entière ou non, car il a en poche des lois qui le lui permettent : il passe naturellement du *discret* au *continu* [b].
Hors d'un contexte physique, un mathématicien aura besoin d'être convaincu avant de pouvoir généraliser
Considérez par exemple la suite de terme général

$$u_n = \sin(n\pi)$$

En fait, u_n est toujours nul.
Considérez maintenant la fonction définie pour tout réel t par $f(t) = \sin(t\pi)$...
Par exemple $f(1/2) = \sin(\pi/2) = 1$ donc la fonction f n'est pas nulle partout en fait.
Imaginez un physicien prenant chaque seconde des mesures d'un phénomène obéissant à cette loi [c] : il pourrait conclure qu'après avoir jeté un caillou dans l'eau, la surface reste immobile...
Pour en revenir à nos moutons, une suite numérique peut apparaître comme une « suite de mesures » à intervalle de temps régulier : garder cette image en tête pourra peut-être vous aider à mieux appréhender l'étude des suites, et l'étude des suites devrait elle-même vous aider à appréhender les propriétés des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
De manière plus abstraite, on peut aussi considérer une suite numérique comme un classement de nombres réels : on prend des réels et on leur colle un dossard.
Considérons par exemple la suite des entiers pairs :
0 a le dossard n°0
2 a le dossard n°1
4 a le dossard n°2
6 a le dossard n°3 etc.
ce qui revient à étudier la suite p_n de terme général $p_n = 2n$.
Oui mais si on prend la suite $u_n = \sin(n\pi)$, le pauvre 0 va se retrouver avec une infinité de dossards...Voici un écueil fréquemment rencontré par les valeureux pédagogues cherchant un support intuitif concret à une notion mathématique abstraite : ça peut aider, mais il faut être conscient des limites.

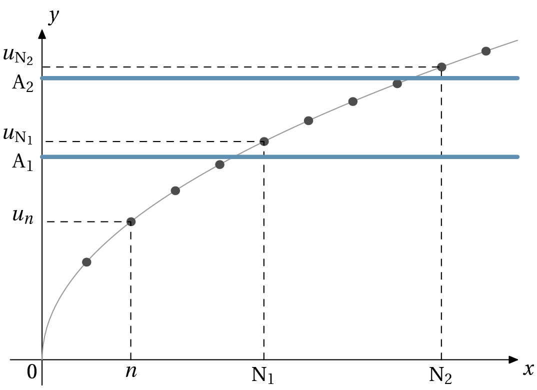
C 2 Comment traduire qu'une suite diverge vers l'infini ?

Une suite est en particulier une fonction, donc la définition vues à la première leçon reste valide

b. Ce passage du discret au continu est l'un des points forts de votre formation : nous en reparlerons tout au long de l'ouvrage, notamment au moment de la découverte du calcul intégral et des lois de probabilité à densité. Voir aussi l'annexe 1 en fin d'ouvrage
c. par exemple une onde se propageant à la surface de l'eau

Définition VI - 4 : Suite divergeant vers l'infini

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si et seulement si , pour tout réel positif A, il existe **un** entier N tel que **pour tout** entier n supérieur à N, on a $u_n > \mathrm{A}$.



Reprenons par exemple le cas de l'objet tombant dans le vide : considérons donc la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $h_n = 5n^2$.
Soit A un réel positif quelconque. Nous voudrions savoir s'il existe un rang N à partir duquel les valeurs prises par la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *toujours* supérieures à A.
Il s'agit donc de résoudre **dans** $\mathbb{N}$ l'inéquation

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I}) : \ 5n^2 \geqslant \mathrm{A}\\&(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow n^2 \geqslant \mathrm{A}/5\\&(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow n \geqslant \sqrt{\mathrm{A}/5} \text{ car } \mathrm{A} \geqslant 0\end{aligned}$$

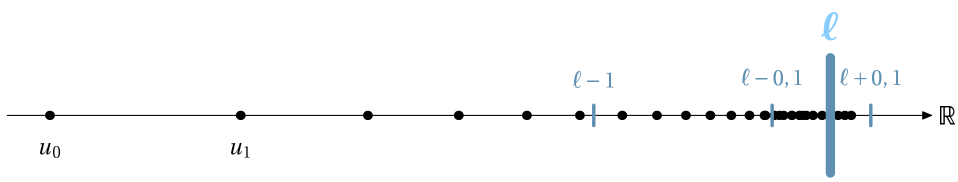
Donc, dès que n sera supérieur à $\sqrt{\mathrm{A}/5}$, on aura h_n supérieur à A. Donc, d'après notre définition, on peut dire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
Mais attention ! $\sqrt{\mathrm{A}/5}$ n'a aucune raison d'être un entier ! N est en fait le premier entier supérieur à $\sqrt{\mathrm{A}/5}$.

C 3 Comment traduire qu'une suite converge ?

Adaptons ici encore le langage des limites des fonctions au cas de suites

Définition VI - 5 : Suite convergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi **tous les termes de la suite à partir d'un certain rang**



Prenons un exemple simple : la suite de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.
On observe $v_1 = 2$, $v_2 = 3/2$, $v_{100} = 1,01$, $v_{10000} = 1,0001$: la suite semble converger vers 1.
Prenons un intervalle centré en 1 : il est de la forme $]1-\varepsilon ; 1+\varepsilon[$
Résolvons alors

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}_n) :\ 1-\varepsilon < v_n < 1+\varepsilon\\
&(\mathrm{I}_n) \Longleftrightarrow 1-\varepsilon < 1+1/n < 1+\varepsilon\\
&(\mathrm{I}_n) \Longleftrightarrow -\varepsilon < 1/n < \varepsilon\\
&(\mathrm{I}_n) \Longleftrightarrow 0 < 1/n < \varepsilon \text{ car } n \text{ est strictement positif}\\
&(\mathrm{I}_n) \Longleftrightarrow n > 1/\varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, quelque soit ε, c'est à dire quelque soit l'intervalle ouvert centré en 1, tous les termes v_n de la suite seront dans l'intervalle dès que n est supérieur à $1/\varepsilon$.

Les théorèmes généraux sur les limites de fonctions sont bien sûr applicables aux suites numériques : nous ne reviendrons pas dessus. Énonçons toutefois un théorème très important admis en terminale :

Théorème VI - 2 : Théorème de la limite monotone

Toute suite réelle croissante (décroissante) et majorée (minorée) est convergente

Essayez d'en déduire que toute suite croissante qui n'est pas majorée diverge vers $+\infty$.

D Première série d'exercices

D 1 Croyable mais faux !

Exercice VI - 7 Croyable mais faux !

Mathémator combat les idées reçues sur les suites : une interview exclusive.

Téhessin : Est-il vrai qu'une suite strictement croissante diverge forcément vers $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : une suite qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Téhessin : Est-il vrai qu'une suite qui diverge vers $+\infty$ est forcément croissante à partir d'un certain rang ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Téhessin : Est-il vrai qu'une suite bornée converge forcément vers un réel ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Téhessin : Est-il vrai qu'une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs converge forcément ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle va se stabiliser sur l'une d'elle. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver le *contre-exemple*.

D 2 Avec les définitions.

Exercice VI - 8

On considère la suite définie par $u_n = 2 + 1/n$ pour $n \geqslant 1$
– Calculer les dix premiers termes de la suite et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

- Observer la représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
- On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 , c'est-à-dire $]1,99;2,01[$. Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.
- On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon r , c'est-à-dire $]2-r,2+r[$.
  Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de r , tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.
- Démontrer que (u_n) converge vers 2.

Exercice VI - 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

- Calculer les dix premiers termes de la suite et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite ?
- On considère l'intervalle $]a,+\infty[$ avec $a \geqslant 10$.
  Montrez qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de a, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.
- Montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice VI - 10

Démontrez que si une suite est convergente, alors elle est bornée.

D 3 Avec les propriétés.

Exercice VI - 11

Déterminez les limites des suites de termes généraux suivants :

$$u_n = \cos n - n \quad v_n = 2n + (-1)^n \quad a_n = \frac{\sin n}{n} \quad b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n \quad c_n = \frac{3-\cos n}{n}$$

Exercice VI - 12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général

$$u_n = \sqrt{n^2+6n} - n$$

- Conjecturez la limite de la suite à l'aide de la calculatrice
- Montrez que $u_n = \dfrac{6}{\sqrt{1+6/n}+1}$ et déduisez-en la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice VI - 13

On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$$

En déterminant le plus petit et le plus grand terme de s_n, montrez que

$$\frac{n}{n+1} \leqslant s_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+n}$$

et déduisez-en la limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice VI - 14 Style Bac avec ROC

Soit $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une suite. On considère les propriétés suivantes
- P_1 la suite (u_n) est majorée ;
- P_2 la suite (u_n) n'est pas majorée ;
- P_3 la suite (u_n) converge ;
- P_4 la suite (u_n) tend vers + ;
- P_5 la suite (u_n) est croissante.

1. Donner la traduction mathématique des propriétés P_1 et P_4.
2. Si les propriétés P_1 et P_5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (u_n) (on ne demande pas de justifier la réponse) ?
3. Si les propriétés P_2 et P_5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (u_n) (on ne demande pas de justifier la réponse) ?
4. Une suite vérifiant la propriété P_4 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P_2 (on demande de justifier la réponse) ?
5. Une suite vérifiant la propriété P_2 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P_4 (on demande de justifier la réponse) ?

Exercice VI - 15 Encore un

Partie A Démonstration de cours
Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

1. Soit M un nombre réel et n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geqslant M$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant M$.
2. Quelles conséquences peut-on en tirer pour la suite (u_n) ?
3. Énoncer le théorème du cours ainsi démontré.

Partie B
Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en justifiant chaque réponse :
- Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
- Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

Exercice VI - 16 Et un autre

Partie I
À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
Pour chacune des affirmations suivantes répondre sans justification par Vrai ou Faux :
(A) Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs strictement positives. Si, pour tout entier n, $v_n \geqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n^2}{u_n} = +\infty$.
(B) Toute suite bornée est convergente.
(C) Pour toutes suites (u_n) et (v_n) à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$, la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 1.
(D) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Partie II
Pour chacune des propositions de la première partie, justifier votre réponse :
- dans le cas où la proposition vous paraît fausse : en donnant un contre-exemple.
- dans le cas où la proposition vous paraît exacte : en donnant une démonstration.

D 4 Exercices divers

Exercice VI - 17 écriture avec ou sans symbole $\sum$.

– Ecrire sans $\sum$:

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n,\quad \sum_{p=1}^{n}p,\quad \sum_{p=1}^{n}n,\quad \sum_{p=1}^{n}\frac{n}{p}$$

– Ecrire avec $\sum$:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

Exercice VI - 18 variables de comptage.

Les égalités suivantes sont-elles vraies :

$$\sum_{p=1}^{n}(p\times n)=\sum_{k=1}^{n}(k\times n)=n\times\sum_{k=1}^{n}k=k\times\sum_{k=1}^{n}n$$

Exercice VI - 19

Calculez les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}p,\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}k,\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}n.$$

Exercice VI - 20 Tapis de Sierpinski : le retour

Monsieur Sierpinski [d] avait ramené d'un voyage en Orient un tapis carré de 1 mètre de côté dont il était très content. Jusqu'au jour où les mites s'introduisirent chez lui.
En 24 heures, elles dévorèrent dans le tapis un carré de côté trois fois plus petit, situé exactement au centre du tapis. En constatant les dégats, Monsieur Sierpinski entra dans une colère noire ! Puis il se consola en se disant qu'il lui restait huit petits carrés de tapis, chacun de la taille du carré disparu. Malheureusement, dans les 12 heures qui suivirent, les mites avaient attaqué les huit petits carrés restants : dans chacun, elles avaient mangé un carré central encore trois fois plus petit. Et dans les 6 heures suivantes elles grignotèrent encore le carré central de chacun des tout petits carrés restants. Et l'histoire se répéta, encore et encore ; à chaque étape, qui se déroulait dans un intervalle de temps deux fois plus petit que l'étape précédente, les mites faisaient des trous de taille trois fois plus petite...

– Faire des dessins pour bien comprendre la géométrie du tapis troué. Calculer le nombre total de trous dans le tapis de Monsieur Sierpinski après n étapes. Calculer la surface S_n de tapis qui n'a pas encore été mangée après n étapes. Trouver la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$. Que reste-t-il du tapis à la fin de l'histoire ?
– Calculer la durée totale du festin « mitique »...

Exercice VI - 21 Paradoxe de Zénon.

Le paradoxe suivant a été imaginé par Zénon d'Élée (490-430 Avant JC). Achille fait une course avec la tortue. Il part 100 mètres derrière la tortue, mais il va dix fois plus vite qu'elle. Quand Achille arrive au point de départ de la tortue, la tortue a parcouru 10 mètres. Pendant qu'Achille parcourt ces 10m, la tortue a avancé d'un mètre. Pendant qu'Achille parcourt ce mètre, la tortue a avancé de 10cm... Puisqu'on peut réitérer ce raisonnement à l'infini, Zénon conclut qu'Achille ne peut pas dépasser la tortue [e].

d. voir exercice page ??
e. Il existe une variante fléchée : avant d'atteindre sa cible, une flèche doit d'abord parcourir la moitié de la distance la séparant de la cible, puis la moitié de la distance restante et ainsi de suite...une infinité de fois, donc la flèche n'atteint jamais la cible !

Comment peut-on dépasser ce paradoxe ?

Exercice VI - 22 Une bille qui rebondit. [f]

Vous aurez besoin d'utiliser quelques lois physiques du programme de Terminale que nous reverrons lors de l'étude des équations différentielles

- En chute libre verticale, l'altitude z suit la loi $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$
- la vitesse suit la loi $v(t) = -gt + v_0$ en coordonnées algébriques
- Théorème de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_C(B) - \mathcal{E}_C(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(z_B - z_A)$
- Une balle part d'une certaine hauteur h_0 au dessus du sol (sans vitesse initiale). Combien de temps met-elle pour arriver sur le sol (négliger les frottements) ? Quelle est son énergie cinétique lorsqu'elle arrive au niveau du sol ?
- On modélise le rebond de la façon suivante : lorsque la balle rebondit elle perd une certaine proportion p de son énergie cinétique (par exemple $p = 10\%$). Étant partie de la hauteur h_0, à quelle hauteur h_1 va-t-elle remonter ? Quelle est la durée t_0 entre les deux premiers rebonds ?
- Combien de fois la balle rebondit-elle ? Pendant combien de temps rebondit-elle ?
- Question subsidiaire : vous connaissez le bruit d'une bille qui rebondit, avec des rebonds de plus en plus rapprochés. Imaginez maintenant une balle qui rebondit, non plus selon le modèle ci-dessus, mais selon un autre loi. Par exemple la durée du n-ième rebond est donné par $1/n$. Que va-t-on entendre ? [g]

Exercice VI - 23 La mouche et les trains

Deux trains partent simultanément, et à une même vitesse constante v. Le premier va de Paris à Nantes, et le second, de Nantes à Paris.
Une mouche part simultanément de Paris à vitesse $3v$ (elle suit les rails en direction de Nantes). Lorsqu'elle rencontre le train Nantes-Paris, elle fait demi-tour vers Paris. Lorsqu'elle rencontre le train Paris-Nantes, elle fait demi-tour et de dirige à nouveau vers Nantes, etc. Elle s'arrête lorsque les trains se croisent.

- Faire un dessin dans l'espace-temps (la position en abscisse, par exemple, le temps en ordonnée)
- Combien de fois la mouche fait elle demi-tour ?
- Quelle est la longueur de chaque trajet entre deux demi-tours ?
- Quelle distance la mouche parcourt-t-elle après n demi-tours ?
- Quel temps met-elle pour parcourir cette distance ?
- Au bout de combien de temps les trains vont-ils se croiser ?
- Combien la mouche aura-t-elle fait de demi-tours ?

E Suites adjacentes

E 1 Que sont des suites adjacentes ?

Mathémator : Dire que deux suites sont adjacentes revient à dire qu'elles sont respectivement la suite des extrémités gauches et la suite des extrémités droites d'une suite de segments emboîtés dont la suite des longueurs tend vers 0.

Téhessin (à part) : *Ca y est, il décolle, il faut l'arrêter...* (**à voix haute**) Excusez-moi Maître, est-ce qu'on pourrait l'exprimer de manière plus simple ?

Mathémator : Si vous voulez mon brave petit Téhessin.

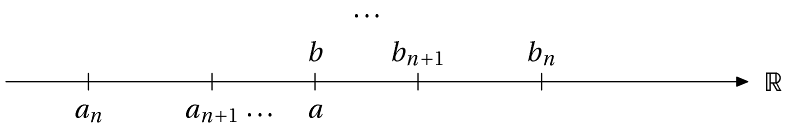
Définition VI - 6 : suites adjacentes

On dit que deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** lorsque

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(b_n - a_n\right) = 0$.

g. voir les résultats du problème de l'ivrogne page ??

Téhessin : Je comprends mieux. Et je vais vous étonner : je vais prendre une initiative et non plus écouter passivement votre évangile mathématique.
Allez hop, je fais un dessin pour illustrer la situation.



Mathémator : Et...

Téhessin : Je m'aperçois que $a_n \leqslant b_n$ pour tout n, non ?

Mathémator : Vous avez raison, mais le fait que $a_n \leqslant b_n$ pour tout n est une conséquence des propriétés i), ii) et iii). En effet, sous ces conditions, la suite $(b_n - a_n)$ est décroissante, et comme elle converge vers 0, tous ses termes sont positifs ou nuls.
Mais voici le principal, qui se comprend sur le dessin et que vous devez savoir démontrer :

Théorème VI - 3 : théorème des suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

La démonstration utilise le théorème de la limite monotone.

E 2 À quoi servent les suites adjacentes ?

Mathémator : Prenons un exemple. Pour calculer des valeurs approchées du nombre e, la base du logarithme néperien, on peut utiliser le résultat classique que e est la limite de la suite de terme général

$$S_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $S_n \leqslant e$ pour tout n. Mais cela ne suffit pas à dire à quelle précision S_n est une valeur approchée de e.

Téhessin : Pour cela, il faudrait majorer e.

Mathémator : Oui, et c'est là que peuvent intervenir les suites adjacentes. Car si l'on trouve une suite (T_n) telle que (S_n) et (T_n) soient adjacentes, alors elles convergeront toutes les deux vers la même limite, forcément égale à e, et on aura aussi $S_n \leqslant e \leqslant T_n$ pour tout n. Ce qui permettra d'obtenir une valeur approchée de e à la précision souhaitée puisque $T_n - S_n$ tend vers 0.
Il reste à trouver une suite (T_n) convenable. D'autres s'en sont chargés avant nous et on montré que l'on pouvait prendre

$$T_n = S_n + \frac{1}{n \cdot n!},$$

et je vous laisse le vérifier... Ce choix de T_n est particulièrement intéressant car $T_n - S_n$ tend alors très vite vers 0, ce qui permet d'obtenir une bonne précision pour des petites valeurs de n. Par exemple, puisque $1/(5 \cdot 5!) = 0{,}0016...$, on obtient une valeur approchée de e par défaut à $2 \cdot 10^{-3}$ près, à savoir

$$S_5 = \frac{123}{60} = 2{,}7166666...$$

alors que, comme vous le savez tous par cœur

$$e \approx 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240 7...$$

Téhessin : Je comprends, mais j'ai une question : une fois que l'on aura montré que (S_n) et (T_n) sont adjacentes, est-ce qu'on ne pourra pas en déduire ce que vous aviez admis tout à l'heure, à savoir que la suite (S_n) converge vers e ?

Mathémator : Que (S_n) converge, oui ! Il suffit d'appliquer le théorème des suites adjacentes. Mais attention, cela ne permettra pas de montrer que la limite de (S_n) est égale à e...

E 3 Exercices

Exercice VI - 24 Le fameux exercice du Bac 2005

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Exercice VI - 25 Vrai ou Faux tombé au Bac

Il y a deux réponses exactes : trouvez-les !

Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.
2. $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$.
3. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.
4. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

Exercice VI - 26 Suites adjacentes et géométrie

Partie A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :

A_1 milieu du segment $[A_0\,B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0,\ 1)\ ;\ B_0,\ 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n,\ 1)\ ;\ B_n,\ 2)\}$.

1. Placer les points A_1 , B_1, A_2 et B_2 pour A_0B_0= 12 cm.
   Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?
2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0\ ;\ \overrightarrow{\imath}\right)$ avec $\overrightarrow{\imath} = \dfrac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Partie B
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$.
   Montrer qu'elle est constante.

Partie C
À partir des résultats obtenus dans les **parties A et B**, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini.

F Suites récurrentes

F 1 Étude générale

Le but de cette section n'est pas de mener une étude exhaustive des suites récurrentes que vous ménerez peut-être l'an prochain, mais plutôt de proposer quelques pistes pour cerner les problèmes, pouvoir mener à bien quelques applications intéressantes et résoudre des exercices de Bac de plus en plus nombreux sur ce sujet. Mais retrouvons nos deux héros...

F 1 a Une relation $u_{n+1}=f(u_n)$ définit-elle toujours une suite ?

Mathémator : Précisons d'abord un peu les choses. On considère une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, ainsi qu'un élément a de I. Et la question est de savoir s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = a \ \text{ et } \ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \ \ u_{n+1} = f(u_n).$$

Téhessin : Il me semble que oui ! Il suffit de définir u_1 comme égal à $f(a)$, et ainsi de suite.

Mathémator : C'est tout ce que cela vous inspire, Téhessin ? Vous êtes sûr de pouvoir continuer ?
Téhessin : Ben, oui, je pose $u_2 = f(u_1)$, puis... ! ? Ah, je vois le problème : il faudrait que f soit définie en u_1 !

Mathémator : Ce qui n'a en effet aucune raison de se produire. Par exemple, il n'existe pas de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = -1 \ \text{ et } \ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \ \ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{u_n}.$$

Car, avec $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \frac{1}{x}$, on a $g(-1) = 0$, donc g n'est pas définie en $g(-1)$.
Il faut également s'assurer qu'aucun des termes suivants ne va être égal à -1.

Téhessin : D'accord, mais si on avait pris une valeur strictement positive pour u_0, alors on aurait eu $g(u_0) > 0$, donc on pourrait définir $g(g(u_0))$ qui serait lui-même strictement positif, etc. On pourrait donc définir tous les termes de la suite.

Mathémator : Tout à fait ! Et le point clé dans ce que vous venez de dire est que $g\big(]0,1[\big) \subset]0,1[$, ce qui, avec la définition suivante, se traduit par « $]0,1[$ est stable par g ».
Cela veut donc dire que si on prend u_0 dans $]0,1[$, on est sûr que tous les termes *resteront* dans cet intervalle.
Il faudra donc travailler sur une partie de l'ensemble de définition qui soit « stable » par f, pour être sûr que tous les termes successifs de la suite puissent être « calculables ».
Maintenant, si a est élément d'une partie S de I stable par f, alors on pourra définir $f(f(a))$ puisque $f(a) \in S$, puis $f(f(f(a)))$ puisque $f(f(a)) \in S$, etc. Il suffit donc de choisir u_0 dans S.

Définition VI - 7 : partie stable

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On dit qu'une partie S de I est **stable par** f lorsque

$$\text{pour tout } x \in \mathrm{S} \quad f(x) \in \mathrm{S}.$$

Définition VI - 8 : suite récurrente

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, un intervalle I stable par f et un réel $a \in \mathrm{I}$.
On peut alors construire une suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Une telle suite ainsi définie est appelée une suite récurrente.

F 1 b Quelles sont les limites possibles d'une suite récurrente ?

Téhessin : Je sais : les limites possibles de (u_n) sont les solutions de l'équation $f(x) = x$. Car si $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n, et si (u_n) converge vers ℓ, alors (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ, et comme $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$, on a donc $\ell = f(\ell)$.

Mathémator : Pas si vite Téhessin. Êtes-vous sûr que $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$?

Téhessin : Euh... Pas tant que ça finalement, il faudrait que $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$.

Mathémator : Ce qui traduit quelle propriété de f ?

Téhessin : Il faut que f *soit continue en* ℓ.

Mathémator : J'aime mieux ça ! Mais même en supposant f continue sur I, la limite ℓ n'est pas nécessairement un point fixe de f !

Téhessin : Ah bon ! ? Alors là, je ne vois vraiment pas pourquoi.

Mathémator : La subtilité sort vraiment du cadre de la terminale. Retenez seulement que I doit être *un intervalle fermé*. Sous toutes ces conditions, on peut effectivement affirmer que les limites possibles d'une suite récurrente sont les points fixes de la fonction.

Théorème VI - 4 : Limite d'une suite récurrente convergente

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, soit f une fonction continue de I vers I, et soit (u_n) une suite d'éléments de I telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Si (u_n) est convergente, alors sa limite est un point fixe de f.

Téhessin : Ça y est, j'ai compris ! Pour trouver la limite de (u_n), on n'a qu'à résoudre l'équation $f(\ell) = \ell$ et (u_n) convergera forcément vers une solution de l'équation.

Mathémator : Pas si vite mon gars. Vous manquez de rigueur et passez à côté d'importants problèmes.
Tout d'abord, l'équation $f(x) = x$ n'a aucune raison d'admettre une seule solution : elle peut en admettre plusieurs ou même aucune.
Mais surtout, rien ne dit a priori que la suite (u_n) converge : elle pourrait très bien ne pas avoir de limite !

Téhessin : Mais s'il n'y a qu'une solution à l'équation, est-ce que (u_n) ne va pas toujours converger vers cette solution ?

Mathémator : Non !

Téhessin : Non ? Aurais-je droit à un exemple ?

Mathémator : Comment vous refuser cette faveur...Prenez par exemple la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 32u_n$$

La fonction $f\ :\ x \mapsto 32x$ admet un unique point fixe...

Téhessin : ...zéro...

Mathémator : ... et pourtant la suite ne converge pas vers 0.
En fait, en terminale, il faut surtout être capable d'avoir une intuition du résultat à partir d'un petit dessin. Nous verrons cela sur quelques exemples. Mais d'abord, nous aurons besoin, pour assurer la stabilité de f ou pour étudier ses variations, de répondre à la question suivante :

F1c Les inégalités concernant u_0 se conservent-elles ?

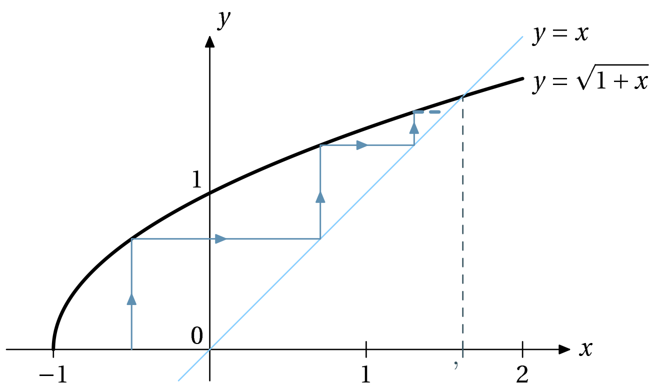
Mathémator : Commençons par étudier un exemple classique : soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1/2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

On peut commencer par déterminer les points fixes de $f \ : \ x \mapsto \sqrt{1+x}$. On montre que le seul point fixe est $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ et même que

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+x} & > & x \text{ si } x \in [-1, \varphi[, \\ \sqrt{1+\varphi} & = & \varphi \\ \sqrt{1+x} & < & x \text{ si } x \in]\varphi, +\infty[\end{array}$$

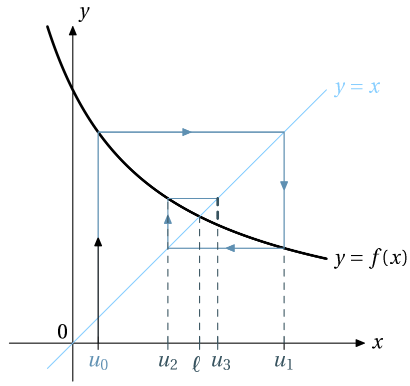
On peut alors placer les premiers termes de la suite.



L'inégalité $a_0 < \varphi$, avec $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, se conserve. En effet, si $a_n < \varphi$ pour un certain n, alors $\sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\varphi}$, c'est-à-dire $a_{n+1} < \varphi$. On a donc montré que $a_n < \varphi$ pour tout n.
Ceci prouve que l'intervalle $[-1, \varphi[$ est stable par f. Donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - u_n > 0$ et donc que (u_n) est croissante et majorée par φ. Elle est donc convergente. Enfin, la fonction f étant continue sur $[-1, \varphi]$, la suite converge vers un point fixe de f, à savoir ici φ.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi$

Plus généralement, on peut aussi parfois déterminer le sens de variation de la suite (u_n) par « conservation d'inégalités ». Supposons par exemple que f soit croissante. Alors la position de u_0 par rapport à u_1 va déterminer le sens de variation de la suite. En effet, si $u_0 \leqslant u_1$, alors $f(u_0) \leqslant f(u_1)$, c'est-à-dire $u_1 \leqslant u_2$, etc : on obtient donc par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n... Et de même, $u_0 \geqslant u_1$ entraîne que la suite (u_n) est décroissante.

Si f est décroissante, les choses se compliquent un peu. Retenez que la suite des termes pairs et impairs sont monotones et de sens de variation contraires : en effet, si par exemple on a $u_0 \leqslant u_1$, on en déduit $u_1 \geqslant u_2$, puis $u_2 \leqslant u_3$, puis $u_3 \geqslant u_4$... On va donc avoir $u_{2n} \leqslant u_{2n+1}$ et $u_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}$ pour tout n. Le dessin suivant en coquille d'escargot vous permettra de visualiser la situation :



Enfin, si f n'est pas monotone, le comportement de (u_n) peut même être très compliqué, « chaotique ». Pour nous amuser, nous examinerons à l'aide de XCAS le comportement d'une suite telle que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \mu\, u_n (1 - u_n)$$

F 1 d En résumé

Voici quelques idées *simples* qui pourront vous guider dans votre étude d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Commencez par étudier la fonction f : si par chance elle est croissante sur un intervalle intéressant, vous pourrez prouver des inégalités intéressantes (en utilisant la conservation de l'ordre par f) et en particulier étudier le sens de variation de la suite selon que u_0 est supérieur ou inférieur à u_1.
- Vous serez le plus souvent amenés à prouver qu'une suite est monotone et bornée, donc convergente.
- Pour déterminer sa limite, on utilise le théorème bien connu. N'oubliez pas de vérifier toutes les conditions d'application, à savoir que la suite est définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, que f est continue de I vers I, I étant un intervalle fermé, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Pour vous aider à visualiser la situation, n'hésitez pas à faire appel à Xcas grâce à la fonction

```
plotseq( f(x),x=u0,n) )
```

G Exercices

Exercice VI - 27 Let's Roc

1. **Démonstration de cours.**
   Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
   « Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».
   Démontrer le théorème suivant :

   Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

   a) Établir que la suite (u_n) est croissante.

   b) Démontrer que si la suite (u_n) a pour limite un réel l, alors l vérifie la relation $l = l + \mathrm{e}^{-l}$.

   c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice VI - 28

Simplifiez l'écriture de $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$

Exercice VI - 29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=-4$ et $u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{u_n}{2}+3}$

- Montrez par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par 0 et 2.
- Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- – Démontrez par récurrence que :

$$0<2-u_n\leqslant 1/2^{n-1}\quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

  – Déduisez-en que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice VI - 30 Une suite convergente de nombres rationnels a-t-elle toujours une limite rationnelle ?

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1. Montrez que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.
2. Montrez que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$
3. En déduire que (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$.
4. Déduisez-en que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{2}{u_n^2}\leqslant 1$.
5. Etudiez alors les variations de (u_n) et déduisez-en que cette suite est convergente.
6. Déterminez la limite ℓ de (u_n).
7. Montrez que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathbb{Q}$. Est-ce que $\ell\in\mathbb{Q}$ pour autant ? Incroyable, non ?
8. Une suite convergente de nombres rationnels a-t-elle toujours une limite rationnelle ?
9. Soit (y_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\quad y_n=\dfrac{2}{u_n}$
   a) Montrer que (y_n) est majorée par $\sqrt{2}$ puis étudier ses variations.
   b) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\quad \sqrt{2}+1\leqslant u_n+y_n\leqslant\sqrt{2}+2$
   c) Etablir que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\quad 0\leqslant u_{n+1}-y_{n+1}=\dfrac{(u_n-y_n)^2}{2(u_n+y_n)}\leqslant\dfrac{(u_n-y_n)^2}{4}$
   d) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\quad 0\leqslant u_n-y_n\leqslant(1/4)^{2^n-1}$
   e) Que peut-on dire des suites (u_n) et (y_n) ?
10. En déduire une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près.
11. Comment qualifieriez-vous la convergence de (u_n) vers $\sqrt{2}$? Justifier.

Exercice VI - 31 Une incursion dans le programme de Math Spé...

- Calculez 3,22222222222222222222222222222222222...
- Calculez 0,323232323232323232323232323232323232...
- Calculez $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}+\ldots$

Exercice VI - 32 Suite homographique

– On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$u_0 = 32$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4}$
– Montrez qu'il existe deux réels a et b tels que $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n + 4}$
– Déduisez-en que u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
– Montrez quel'équation $x = \dfrac{2x-1}{x+4}$ admet une seule solution que l'on notera α.
– Montrez que$u_n \neq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
– Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}.$$

Montrez que la suite (v_n) est arithmétique.
– Exprimer u_n en fonction de n pour tout n.
– Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice VI - 33 Vrai ou Faux

Deux affirmations parmi les quatre suivantes sont vraies

Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 & = & 1,5 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

1. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.
2. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.
3. La suite (v_n) est majorée.
4. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

Exercice VI - 34 Bac

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leqslant 0,95u_n \quad \text{si et seulement si} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}.$$

   a) Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   b) Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.
   c) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.
   d) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

3. a) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.
   b) Que peut-on en déduire pour la suite ?
4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16} u_{16}.$$

   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice VI - 35 Bac

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1. a) Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$
Étudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. (On prendra comme unité 2 cm).

   b) Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

   b) Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

   c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

   d) Prouver qu'elle converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation
$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$
En déduire sa valeur.

Exercice VI - 36 Chaos syldave

Comme vous le savez tous, le Schblurb commun à ailette mouchetée est l'animal emblématique de la Syldavie. Aussi paisible que les habitants de ce bucolique pays, le Schblurb se nourrit exclusivement des baies du bleurtschzrn, arbre qui pousse en abondance dans les verts sous-bois syldaves. Si l'on ne considérait que cette idéale situation, la population u de Schblurbs suivrait la loi suivante

$$u_{n+1} = \mathrm{R}u_n$$

Cette relation traduit le fait que la population de l'année $n+1$ est proportionnelle à l'année n : on applique à u_n le taux de natalité et le taux de mortalité. Le coefficient R résume ces proportions.
Il est assez aisé d'objecter au modèle précédent que l'évolution ne peut par rester proportionnelle à la population de l'année précédente : au bout d'un moment la nourriture et l'espace vital, par exemple, viennent à manquer.
On se propose d'étudier l'évolution d'une population de Schblurbs à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbb{R}$).
Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des Schblurbs reste inférieur à un million. L'effectif des Schblurbs, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 Schblurbs, on prendra $u_0 = 0,3$.
On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus. Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1. Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite l vérifie la relation $f(l) = l$.
2. Supposons $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.

   a) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

   d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de Schblurbs avec ces hypothèses ?

3. Supposons maintenant $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.

   a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ 1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$.

b) En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,

- montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$
- établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

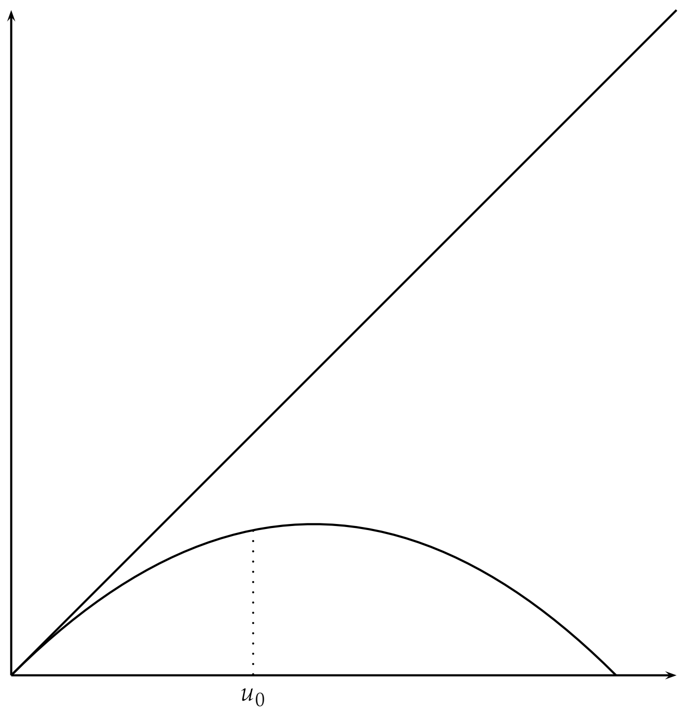
c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de Schblurbs avec ces hypothèses ?

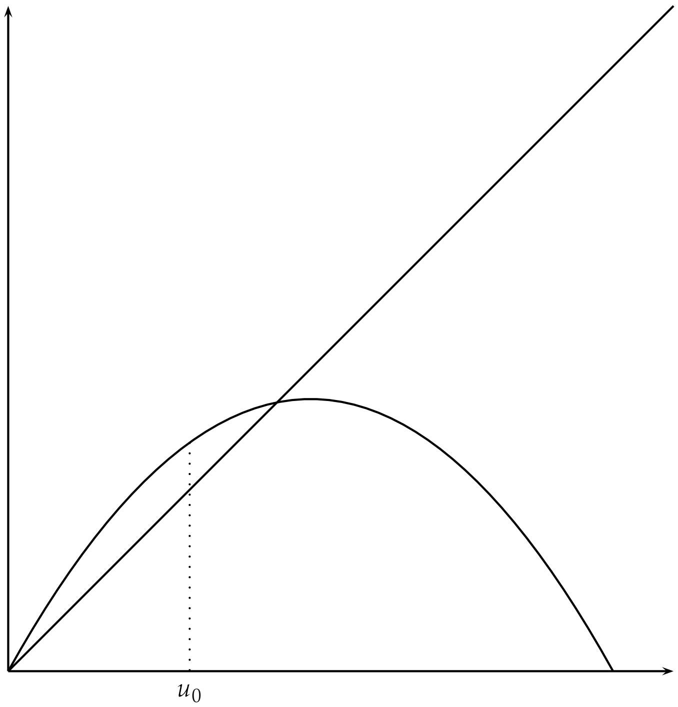
4. On a représenté sur les feuilles annexes la fonction f dans les deux cas étudiés ci-dessus ainsi que la droite d'équation $y = x$. Le troisième graphique correspond au cas où $u_0 = 0,8$ et $k = 3,2$.
Illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en **1.** et **2.** en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives u_0, u_1, u_2, …
En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l'évolution de la population dans le troisième cas.

Feuilles annexes

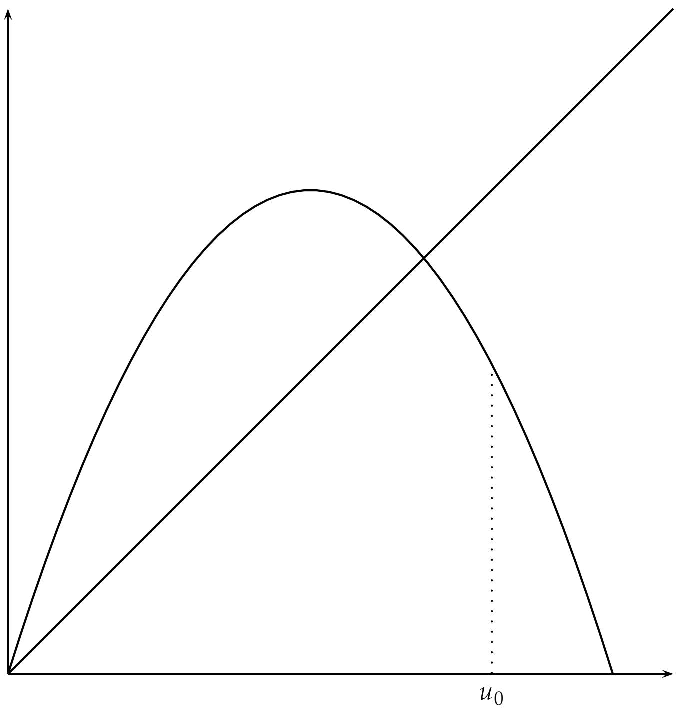
1^er^ cas : $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.



2^e^ cas : $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.



3^e^ cas : $u_0 = 0,8$ et $k = 3,2$.



H Bac 2009

Exercice VI - 37

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).
2. a) Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).
   b) Calculer S_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :
Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considére la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.
Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.
Justifier dans chaque cas.
Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.
Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice VI - 38

PARTIE A :
On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :
   $$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$
2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

PARTIE B :
On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \ v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.
   a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.
   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.
2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Exercice VI - 39

PARTIE A :
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

1. **Restitution organisée de connaissances :**
La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} g'(x) &= g(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ g(0) &= 1 \end{cases}$$

Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B :
Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

1. Démontrer que $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n = (e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. En déduire, en utilisant aussi la partie A, que la suite (u_n) converge vers $e-1$.

Exercice VI - 40

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.
a) Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.
c) Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Donner la nature de la suite (w_n). Calculer $w_{2\,009}$.

I Méthode de Newton

Les prérequis sont plus nombreux ! Il faut avoir étudié les suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et la dérivation... et ne pas être trop perdu en Analyse...
Voici un exemple de TP possible en terminale.

I 1 Historique

La méthode de résolution des équations numériques que nous allons voir aujourd'hui a été initiée par Isaac Newton vers 1669 sur des exmples numériques mais la formulation est fastidieuse. Dix ans plus tard, Joseph Raphson met en évidence une formule de récurrence. Un siècle plus tard, Mouraille et Lagrange étudient la convergence des approximations successives en fonction des conditions initiales par une approche géométrique. Cinquante ans plus tard, Fourier et Cauchy s'occupe de la rapidité de la convergence.

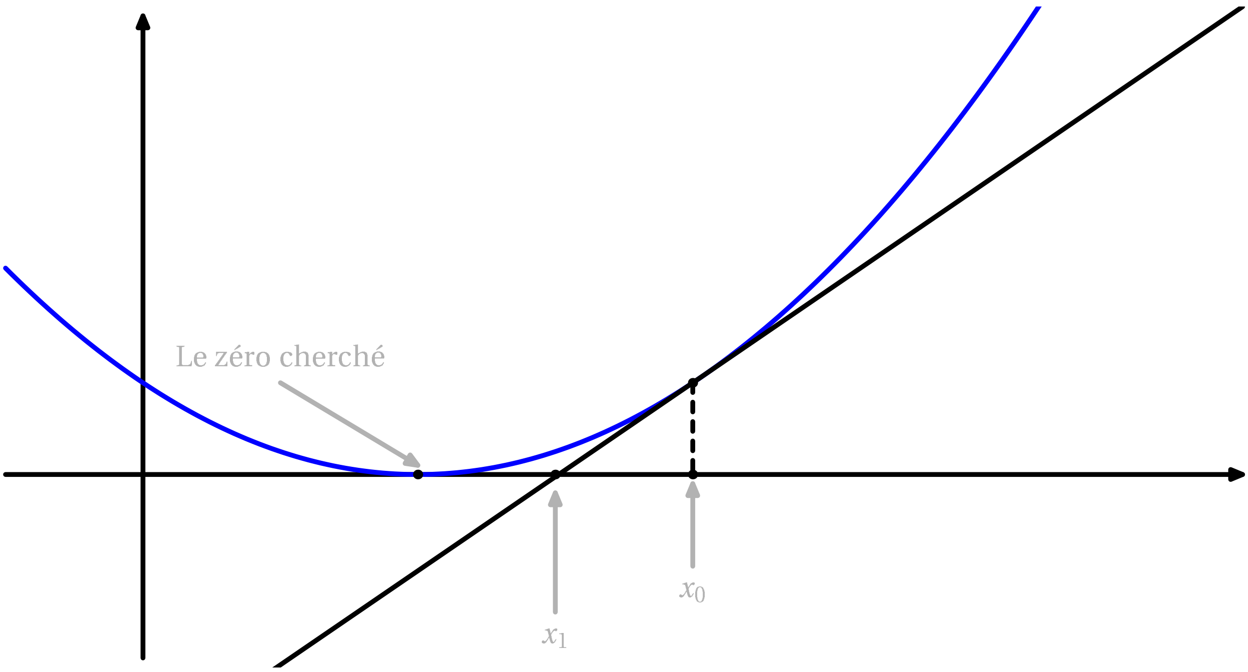
I 2 Principe

Newton présenta sa méthode en traitant l'équation $x^3-2x-5=0$.
Soit f la fonction $x\mapsto x^3-2x-5$. On peut rapidement tracer son graphe à l'aide d'un outil quelconque.
Il coupe l'axe des abscisses pour une valeur comprise entre 2 et 3.
On assimile la courbe à sa tangente au point d'abscisse 2.
Celle-ci a pour équation $y=(x-2)\times f'(2)+f(2)=10(x-2)-1$
Posons $x=2+\varepsilon$ alors $f(2+\varepsilon)=0 \Longleftrightarrow \varepsilon^3+6\varepsilon^2+10\varepsilon-1=0$.
Si on assimile la courbe à sa tangente en 2, alors ε vérifie aussi $0=10(2+\varepsilon-2)-1$ c'est-à-dire $\varepsilon=0,1$.
En fait, assimiler la courbe à sa tangente, c'est négliger les termes en ε d'ordre supérieur à 1 (ici $\varepsilon^3+6\varepsilon^2$).
Un approximation de la solution est donc 2,1.
On recommence ensuite en partant de 2,1 au lieu de 2 puis on reprendra la nouvelle valeur trouvée comme valeur de départ, etc.

I 3 La formule de récurrence

On sent la procédure algorithmique poindre son nez. Pour finir de la mettre en évidence, nous allons formaliser la méthode précédente en introduisant la suite des approximation successives.

- On part d'un nombre quelconque x_0 ;
- à partir de x_0, on calcule un nouveau nombre x_1 de la manière suivante (voir figure) : on trace la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0, et on détermine le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. On appelle x_1 l'abscisse de ce point d'intersection ;
- et on recommence : on calcule un nouveau nombre x_2 en appliquant le procédé décrit au point 2 où l'on remplace x_0 par x_1 ;
- etc.



À partir de cette description graphique de la méthode de Newton, trouver la formule, notée (1), donnant x_1 en fonction de x_0, puis x_{n+1} en fonction de x_n.

Quelles hypothèses doit-on faire sur f et les x_n pour que la formule ait un sens ?

Nous n'irons pas plus loin pour l'instant concernant la convergence de ces suites. Traitons l'exemple de Newton.

14 Étude de la suite associée à l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

On veut résoudre l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$ par la méthode de Newton-Raphson appelée aussi méthode de la tangente. On note f la fonction $x \mapsto x^3 - 2x - 5$.

1. Montrez rapidement que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Montrez que $2 < \alpha < 3$.
2. Déterminez la fonction φ telle que $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, la suite (x_n) étant celle décrite au paragraphe précédent en prenant $x_0 = 3$.
3. Étudiez le sens de variation de la fonction φ puis celui de φ' et déduisez-en que $[\alpha, 3]$ est stable par φ et que φ est strictement croissante sur $[\alpha, 3]$.
4. Que pouvez-vous en déduire sur la convergence de la suite x_n ?

15 Test d'arrêt

Afin de construire un algorithme donnant une approximation d'une solution d'une équation numérique par la méthode de Newton-Raphson, il faudrait déterminer un test d'arrêt c'est-à-dire savoir à partir de quel rang n $|x_n - \alpha|$ restera inférieur à une valeur donnée.
Il suffit de remarquer que $f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha)$. Nous supposerons f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un « bon » voisinage I de α (ce critère nous échappe encore à notre niveau). Alors f est en particulier dérivable en α donc

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) \sim f'(\alpha) \times (x_n - \alpha)$$

C'est-à-dire, puisque $f'(\alpha)$ est supposé non nul :

$$x_n - \alpha \sim \frac{f(x_n)}{f'(\alpha)}$$

Or f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on a f' continue et non nulle en α donc $f'(\alpha) \sim f'(x_n)$.
Finalement

$$x_n - \alpha \sim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1}$$

Nous choisirons donc comme test d'arrêt $\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < p$ avec p la précision choisie.
Il ne reste plus qu'à écrire l'algorithme.

16 Algorithme récursif

D'abord l'algorithme sous forme récursive. En fait, tout a déjà été dit alors traduisons directement.
En XCAS : on notera que `function_diff(f)` renvoie la *fonction* dérivée donc `function_diff(f)(x0)` désigne le *nombre* dérivé de f en x_0.

```
newton_rec(f,x0,eps):={
if(evalf(abs(f(x0)/function_diff(f)(x0)))<eps){evalf(x0)}
else{newton_rec(f,evalf(x0-f(x0)/function_diff(f)(x0)),eps)}
}:;
```

Listing 1 – méthode de Newton-Raphson en récursif (XCAS)

Alors, après avoir fixé par exemple la précision à 100 :

```
DIGITS:=100:;
newton_rec(x->x^2-2,1.0,evalf(10^(-99)))
```

On obtient immédiatement :
1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415728
En CAML : il y a un petit plus car il faut définir une dérivée approchée.

```
# let der(f,x,dx)=(f(x+.dx)-.f(x))/.dx;;
```

Maintenant la partie Newton :

```
# let rec newton_rec(f,xo,dx,eps)=
    if abs_float(f(xo)/.der(f,xo,dx))<eps then xo
    else newton_rec(f,xo-.f(xo)/.der(f,xo,dx),dx,eps);;
```

Listing 2 – méthode de Newton-Raphson en récursif (CAML)

Par exemple :

```
# let k(x)=x*.x-.2.;;

# newton_rec(k,1.,0.0001,0.000000001);;
- : float = 1.41421356245305962
```

17 Algorithme impératif

Ça se complique un peu : évidemment, car il faut faire de l'informatique au lieu de se concentrer sur les mathématiques...

Entrées :
fonction f
précision p
premier terme $a0$
nombre maximum d'itération `// Pour éviter de « planter » si on tombe sur un cas pathologique`

Initialisation : $fp \longleftarrow$ dérivée de f
compteur$\longleftarrow 0$ `// le compteur d'itérations`
$un \longleftarrow u0 - \frac{f(u0)}{fp(u0)}$
début
  tant que $\left|\frac{f(xn)}{fp(xn)}\right|$ *est plus grand que la précision p et que* $k < \mathrm{N}$ **faire**
    si $fp(un) = 0$ **alors**
      On sort de la boucle avant de diviser par zéro et on explique pourquoi
    $un \longleftarrow un - \frac{f(un)}{fp(un)}$
    compteur$\longleftarrow$ compteur+1
fin
retourner *L'approximation et la valeur du compteur*

Algorithme 1 : Newton-Raphson : version impérative

Comparez ensuite avec les résultats trouvés avec la dichotomie.
Regardez également ce qui se passe avec l'équation $(x-1)^4 = 0$: quelle précaution supplémentaire faut-il prendre ? (La preuve n'est évidemment pas envisageable au Lycée).