PLANCHE : similitudes

Exercice 1 : Démontrer le théorème :

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
Il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Exercice 2 : Soit A et B du points distincts du plan orienté. On considère la rotation r_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la rotation r_2 de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et on pose $f = r_2 \circ r_1$.

1. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.
2. Construire le point $A' = f(A)$, puis le centre Ω de la rotation f.

Exercice 3 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $1+i$, $2-i$, $1-i$ et $3-i$.
Déterminer les éléments carctéristiques de la similitude directe f qui transforme A en B et C en D.

Exercice 4 : Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A, de sens direct et I le milieu de $[BC]$.
On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par s la symétrie d'axe (AI).
On pose $f = s \circ r$ et $g = r \circ s$.

1. a. Vérifier que les points A et B sont des points fixes de f.
   b. En déduire que f est une symétrie axiale.
2. Quelle est la nature de la transformation g ?

Exercice 5 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Déterminer l'écriture complexe de la symétrie s par rapport à la droite $\mathcal{C}$ d'équation $y = x + 1$.

Exercice 6 : Soit ABC un triangle de sens direct.
Un point M décrit le segment $[AB]$ privé du point A, et N est le point de la demi-droite $[AC)$ tel que $AN = BM$.
En considérant la similitude directe r qui transforme B en A et M en N, démontrer que la médiatrice Δ de $[MN]$ passe par un point fixe.

Exercice 7 : Soit A, B et C trois points distincts deux à deux. $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[BC]$.
Pour tout point M de $\mathcal{C}$, on construit le triangle AMN rectangle isocèle en M, et de sens direct.
Quel est le lieu géométrique du point N lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$?

Exercice 8 : Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = |z|(2iz+1)$.

1. a. Démontrer que l'application f ainsi définie ne conserve pas l'alignement des points.
   b. En déduire que f n'est pas une similitude.
2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon k et $\mathcal{C}'$ son image par f.
   a. Démontrer qu'il existe une similitude directe s telle que, pour tout point M de $\mathcal{C}$, $f(M) = s(M)$.
   b. En déduire la nature de $\mathcal{C}'$ et ses éléments caractéristiques.
   c. Donner un exemple de cercle dont l'image par f n'est pas un cercle.

Exercice 9 : Soit $ABCD$ un carré direct de centre O et M un point de la droite (CD). La perpendiculaire Δ en A à la droite (AM) coupe (BC) en N. On désigne par I le milieu de $[MN]$.

1. Préciser la nature du triangle AMN.
2. Déterminer la similitude directe f, de centre A, qui transforme M en I.
   Quel est l'ensemble décrit par le point I lorsque M décrit la droite (CD) ?

Exercice 10 : Soit ABC un triangle. Démontrer que l'on peut construire un carré $MNPQ$ tel que M et N appartiennent à $[BC]$, $P \in [AC]$ et $Q \in [AB]$.