Fiche 3: équations différentielles

Exercice 1 *On se propose de résoudre le système différentiel (S) suivant, puis d'en déterminer une solution particulière.*

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} x'(t)+2y(t)=-2\sin t & (E_1)\\ 2x(t)-y'(t)=-2\cos t & (E_2)\end{array}\right.$$

Les fonctions x et y sont des fonctions de la variable réelle t, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A

1. *Montrer en utilisant les équations (E_1) et (E_2) que la fonction x vérifie, pour tout t dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :*
$$x''(t)+4x(t)=-6\cos t \qquad (E)$$
2. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E). En déduire les solutions du système (S).*
3. *Déterminer la solution particulière du système (S) vérifiant les conditions initiales $x(0)=-1$ et $y(0)=0$.*

Partie B

On considère la courbe (Γ) définie par la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & \cos(2t)-2\cos t\\ y & = & g(t) & = & \sin(2t)-2\sin t\end{array}\right.$$

où t est un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ,\ +\pi]$.

1. *Montrer que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie en calculant $f(-t)$ et $g(-t)$.*
2. (a) *Calculer $f'(t)$.*
   Montrer que : $f'(t)=-4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$.

   (b) *Établir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$.*
3. *On admet que $g'(t)=-4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$ et que le signe de g' est donné par le tableau suivant :*

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $g'(t)$	0	$-$	0	$+$	

   Dresser sur l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$ le tableau des variations conjointes des fonctions f et g.
4. *Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe (Γ) aux points B, C et D de paramètre respectifs $t_B=\frac{\pi}{3}$, $t_C=\frac{2\pi}{3}$ et $t_D=\pi$.*
5. *Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 2 cm.*
   On admet que la tangente à la courbe (Γ) au point A de paramètre $t_A=0$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{i}$. Tracer les tangentes aux points A, B, C et D puis la courbe (Γ).

Exercice 2 ***PARTIE A : Résolution d'une équation différentielle***

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' - y' - 2y = (-6x - 4)\, e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :*

$$(E_0) \quad y'' - y' - 2y = 0$$

2. *Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$h(x) = \left(x^2 + 2x\right) e^{-x}$$

   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).*
4. *Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales :*

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 1$$

PARTIE B : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)^2\, e^{-x}$$

Sa courbe représentative C dans un repère orthonormal est donnée sur la figure ci-après.

1. (a) *Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.*

   (b) *Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.*

   (c) *Interpréter graphiquement le résultat obtenu au b).*

2. (a) *Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$,*

$$f'(x) = \left(1 - x^2\right) e^{-x}$$

   (b) *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.*

   (c) *En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.*

3. (a) *A l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \to e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \to e^{-x}$.*

   (b) *Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est :*

$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

   avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

   (c) *En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.*

PARTIE C : Calcul intégral

1. (a) *La fonction f définie dans la partie B étant une solution de l'équation différentielle (E) :*

$$y'' - y' - 2y = (-6x - 4)\, e^{-x}$$

montrer que f vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) + (6x+4)e^{-x}\right]$$

(b) *Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x) - f(x) - (6x+10)e^{-x}\right]$$

Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$F'(x) = f(x)$$

(c) *Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$:*

$$F(x) = \left(-x^2 - 4x - 5\right) e^{-x}$$

2. *Utiliser ce qui précède pour démontrer que l'aire A de la partie du plan hachurée sur la figure est, en unités d'aire,*

$$A = 2e - 5$$