PLANCHE 1 : limites et continuité

Exercice 1 : Déterminer la limite éventuelle de chacune des fonctions suivantes en $+\infty$:

a. $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ b. $g(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ c. $h(x) = 1 + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
d. $i(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x}$ e. $j(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{x}}$ f. $k(x) = x^2 - 6x + 9$

Exercice 2 : Déterminer la limite éventuelle de chacune des fonctions suivantes en 0 :

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ b. $g(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}$ c. $h(x) = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+2}$
d. $i(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}}$ e. $j(x) = \frac{2x^2+x+3}{x}$ f. $k(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$

Exercice 3 : Déterminer la limite éventuelle de chacune des fonctions suivantes, préciser pour chaque calcul s'il y a indétermination et lever celle-ci le cas échéant :

a. $f(x) = x^2 - 5x + 3$ en $+\infty$ b. $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$ en $+\infty$ c. $h(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ en 1
d. $i(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ en $-\infty$ et $+\infty$ e. $j(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ en 1 f. $k(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+4}}{\sqrt{4x^2-4x+8}}$ en $+\infty$

Exercice 4 : En utilisant le théorème des gendarmes ou un théorème de comparaison, déterminer les limites des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{x}{2-\sin x}$ en $+\infty$ et $-\infty$ b. $g(x) = x \cos \frac{1}{x}$ en 0
c. $h(x) = x^2(10 + \cos x)$ en $+\infty$ et $-\infty$ d. $i(x) = \cos^2 x - x$ en $+\infty$ et $-\infty$

Exercice 5 : On considère la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes, déterminer leurs asymptotes éventuelles :

a. $f(x) = \frac{2}{x+1}$ b. $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$ c. $h(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$
d. $i(x) = \frac{3x^2+5}{x^2+1}$ e. $j(x) = 2x - 4 + \frac{5}{x-3}$ f. $k(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$

Exercice 6 :
On considère la fonction $g : x \longmapsto \frac{x^3}{x^2+3x+3}$.

1. Démontrer que $g(x)$ s'écrit aussi sous la forme : $x - 3 + \dfrac{6x + 9}{x^2 + 3x + 3}$.
2. Déterminer l'asymptote à la courbe représentative de g et préciser la position de cette courbe par rapport à la droite.

Exercice 7 :
Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$.

1. Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que $g(x) + 2x = \dfrac{1}{g(x)}$.
3. En déduire que la droite d d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe représentative de g en $-\infty$. Quelle est la seconde asymptote à cette courbe ?
4. Préciser la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

Exercice 8 : Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

a. $\lim_{x\to-\infty}(x^2e^x - x)$ b. $\lim_{x\to 0} x^x$ c. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3e^{2x}+1}{e^{2x-1}}$
d. $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x^2)}{x^{0,1}}$ e. $\lim_{x\to+\infty}(x^2 \ln x - x^2)$ f. $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{3^x}$

Exercice 9 : Étudier les branches infinies des fonctions f et g définies respectivement par :
$f(x) = \frac{x^2+x-3}{x-1}$ et $g(x) = 2x - \sqrt{x}$