Fiche 1: équations différentielles

Exercice 1 *Déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction* $f : x \mapsto \cos(2x)$.

Exercice 2 *La fonction* $\varphi : x \mapsto (e^x + e^{-x}) - \sin x + x$ *est-elle une solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation diffé rentielle*

$$y'' - y = -x$$

Exercice 3 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :*

$$\left(x^2 + 1\right) y' = xy$$

Exercice 4 *Résoudre sur* $\mathbb{R}_+^*$ *l'équation différentielle :*

$$y - 2xy' = 1$$

Exercice 5 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation diffé rentielle*

$$y' + 2y = 0$$

Exercice 6 *Résoudre sur* $]0, \pi[$ *l'équation différentielle :*

$$(\sin t)\, y' - (\cos t)\, y = 0$$

Exercice 7 *Résoudre l'équation différentielle sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$y' - 3y = 5$$

On pourra déterminer une fonction constante comme solution particulière.

Exercice 8 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$y' + 2y = e^x$$

Exercice 9 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$2y' - y = \cos t$$

On pourra chercher une solution particulière du type :

$$t \mapsto \alpha \cos t + \beta \sin t \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 10 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y' + 2y = xe^x$$

Exercice 11 *Déterminer l'expression de la dérivée sur* $]0, \pi[$ *de la fonction*

$$t \mapsto -\frac{\cos t}{\sin t}$$

et en déduire la résolution de l'équation différentielle définie sur $]0, \pi[$ *par*

$$(\sin t)\, y' - (\cos t)\, y = t$$

Exercice 12 *Résoudre les équations différentielles :*

$$2y'' + 3y' - 2y = 0$$
$$y'' + 2y' + y = 0$$
$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Exercice 13 *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y'' - 2y' + 6y = t^2 + t - 5$$

Exercice 14 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + 9y = 2\cos(3t)$$

On pourra chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto kt\sin(3t)$, *où* k *est une constante réelle.*
Déterminer la solution f *qui vérifie* $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = 3$.

Exercice 15 *Un bassin artificiel destiné à la pisciculture contient 30 000 litres d'eau pure. A un certain moment, une eau polluée à 4 % par une substance chimique* S *se déverse dans le bassin de façon continue avec un débit moyen de* 150 *litres à l'heure. On suppose qu'à partir de ce même moment, le bassin laisse échapper son contenu avec le même débit. On se propose de déterminer à chaque instant le pourcentage de substance* S *présente dans l'eau du bassin.*

On note $y(t)$ *le volume en litres de substance* S *présente à la date* t, *en choisissant comme origine des temps l'instant où le phénomène de pollution commence, et comme unité de temps l'heure.*

1. *Déterminer la quantité de substance* S *déversée en une heure dans le bassin.*
2. *On peut établir que* $y(t)$ *est solution de l'é quation différentielle* (E)

$$y' + 0,005y = 6$$

   (a) *Déterminer une fonction* g *constante solution de* (E).

   (b) *Montrer que* f *est solution de* (E) *si et seulement si* $(f - g)$ *est solution de l'équation* (E') *définie par :*

$$y' + 0,005y = 0$$

   (c) *Résoudre alors l'équation différentielle* (E)

   (d) *En déduire l'expression de* $y(t)$ *en fonction de* t.

3. *Calculer le pourcentage* $p(t)$ *de substance* S *pré sente dans l'eau du bassin en fonction de* t.
4. *Quel est le pourcentage maximal de subtance* S *contenue dans le bassin ?*
5. *La vie des poissons sera en danger lorsque le taux de substance* S *dans l'eau du bassin atteindra 2%. Quel est le temps dont disposera le pisciculteur pour arrêter cette polution ?*