Fiche 2: Suites et séries

Exercice 1 :

Etude de la suite définie par $u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + u_{n-1}$ (1) avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

1. Montrer qu'il existe deux suites géométriques (v_n) et (w_n) définies respectivement par $v_n = \alpha^n$ et par $w_n = \beta^n$ vérifiant l'égalité (1).
2. Montrer que quels que soient λ et μ réels alors la suite $(\lambda v_n + \mu w_n)$ vérifie l'égalité (1).
   Nous admettrons que toute suite vérifiant (1) est de cette forme.
3. Déterminer λ et μ tels que les conditions initiales soient vérifiées.
4. En déduire la convergence ou la divergence de la suite (u_n).

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}+u_n}{3}$.
On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. Calculer $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$en fonction de n.
3. Calculer S_n en fonction de u_n et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 3 :

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geq a > 0$) :
$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \qquad \text{et} \qquad a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$
3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \leq v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante.
   (d) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont même limite.